

Capa de
HUGO RIBEIRO
(Arquiteto)

Figuras do texto de
HUGO RIBEIRO e WALDEMAR VALLIN

ARY QUINTELLA
(Professor Catedrático do Colégio Militar)

MATEMÁTICA

para o
TERCEIRO ANO COLEGIAL

(Com 550 exercícios)

12.^a edição
(Revista e ampliada)

Acrescido de um Apêndice com Questões de Concurso
de Habilitação às diversas Universidades do país.

Exemplar Nº 7467

1965

Impresso nos Estados Unidos do Brasil
Printed in the United States of Brazil

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

DO MESMO AUTOR

CURSO GINASIAL :

- Matemática* - primeira série ginasial.
- Matemática* - segunda série ginasial.
- Matemática* - terceira série ginasial.
- Matemática* - quarta série ginasial.

CURSOS CLÁSSICO E CIENTÍFICO :

- Matemática* - primeiro ano.
- Matemática* - segundo ano.

CURSO COMERCIAL BÁSICO (esgotados) :

- Aritmética prática*, para o primeiro ano.
- Matemática*, para o segundo ano.
- Álgebra Elementar*, para o terceiro ano.

CURSO DE ADMISSÃO :

(Em colaboração com o Prof. NEWTON O'REILLY)

Exercícios de Aritmética.

EXAME DE MADUREZA :

Guia de Matemática, para os exames do Artigo 99.

CURSO VESTIBULAR : (esgotado)

(Em colaboração com o Prof. VICTALINO ALVES)

Matemática. Questões de Concurso nas Escolas Superiores.

EDIÇÕES DA

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

Rua dos Gusmões, 639 - São Paulo 2, SP

★

CURSO NORMAL :

(Em colaboração com o Prof. FRANCISCO JUNQUEIRA)

Matemática. 1.º ano dos Cursos Normais do Est. da Guanabara (Conquista).

ÍNDICE GERAL

<i>Índice dos Exercícios</i>	10
<i>Programa de Matemática do 3.º ano Colegial</i>	11

1) FUNÇÕES. GRÁFICOS

1.1 - Intervalo.....	13	1.9 - Função definida em um intervalo.....	18
1.2 - Variável. Constante....	14	1.10 - Classificação das funções	19
1.3 - Variável progressiva....	15	1.11 - Funções inversas.....	21
1.4 - Representação gráfica duma variável real contínua.....	15	1.12 - Funções periódicas.....	22
1.5 - Função.....	16	1.13 - Funções pares e ímpares	22
1.6 - Função real de variável real.....	17	1.14 - Função de função.....	22
1.7 - Notação funcional.....	17	1.15 - Representação gráfica das funções.....	22
1.8 - Função definida em um ponto.....	18	1.16 - Gráfico das funções usuais	25

2) LIMITES. CONTINUIDADE

2.1 - Limite de uma variável	33	2.9 - Limites laterais de uma função.....	49
2.2 - Tendência da variável para seu limite.....	34	2.10 - Função contínua no ponto a	51
2.3 - Limite infinito.....	35	2.11 - Continuidade num intervalo.....	52
2.4 - Infinitésimos.....	35	2.12 - Pontos de descontinuidade.....	53
2.5 - Propriedades dos limites	36	2.13 - Classificação das descontinuidades.....	53
2.6 - Operações com limites.	36		
2.7 - Limite de uma função.	41		
2.8 - Limites fundamentais...	42		

3) FUNÇÃO LINEAR. LINHA RETA

3.1 - Equação da linha reta.	59	3.4 - Diversas formas da equação da reta.....	64
3.2 - Casos particulares.....	62	3.5 - Representação paramétrica.....	66
3.3 - Parâmetro angular e linear.....	63	Problemas.....	67

3.6 - Retas que passam num ponto.....	67	3.10 - Ângulo de duas retas...	72
3.7 - Reta que passa por dois pontos.....	69	3.11 - Paralelismo.....	75
3.8 - Intersecção de duas retas	70	3.12 - Perpendicularismo.....	76
3.9 - Distância de um ponto a uma reta.....	71	3.13 - Área do triângulo.....	78
		3.14 - Resumo.....	79

4) EQUAÇÃO DO 2.º GRAU. CIRCUNFERÊNCIA DE CÍRCULO

4.1 - Distância entre dois pontos. Fórmula.....	83	4.3 - Equação geral do segundo grau a duas variáveis e a circunferência de círculo.....	85
4.2 - Equação da circunferência de círculo em coordenadas cartesianas ortogonais.....	84	4.4 - Intersecções de retas e circunferências.....	87

5) DERIVADAS

5.1 - Acréscimos.....	91	5.8 - Terceiro grupo: funções transcendentais.....	104
5.2 - Derivada em um ponto	92	5.9 - Derivadas sucessivas...	110
5.3 - Regra geral de derivação	93	5.10 - Diferencial.....	110
5.4 - Interpretação geométrica	94	5.11 - Interpretações geométricas.....	111
5.5 - Interpretação cinemática	95	5.12 - Resumo Formulário....	112
Regras de derivação....	96		
5.6 - Primeiro grupo.....	96		
5.7 - Segundo grupo: funções algébricas.....	98		

6) VARIAÇÃO DAS FUNÇÕES. MÁXIMOS E MÍNIMOS

6.1 - Funções crescentes e decrescentes.....	116	6.5 - Interpretação geométrica	122
6.2 - Sinal da derivada.....	117	6.6 - Pontos de inflexão.....	122
6.3 - Máximos e mínimos....	118	6.7 - Estudo da variação de uma função.....	124
6.4 - Cálculo dos máximos e mínimos.....	119		

7) FUNÇÕES PRIMITIVAS. INTEGRAL

7.1 - Funções primitivas.....	128	7.4 - Integral de monômios e polinômios.....	132
7.2 - Constante de integração. Integral indefinida.....	129	7.5 - Integral definida. Cálculo de áreas.....	133
7.3 - Propriedades elementares da integral.....	130		

8) NÚMEROS COMPLEXOS

8.1 - Imaginário puro. Unidade imaginária.....	139	8.5 - Módulo e norma.....	141
8.2 - Potências da unidade imaginária.....	140	8.6 - Complexos conjugados..	142
8.3 - Números complexos....	141	8.7 - Operações racionais....	142
8.4 - Condições de igualdade e nulidade.....	141	8.8 - Representação geométrica.....	145
		8.9 - Representação Trigonométrica. Argumento	147

9) POLINÔMIOS: IDENTIDADE. DIVISÃO POR $x - a$. FÓRMULA DE TAYLOR

9.1 - Polinômios de uma variável.....	150	9.9 - Regra de Ruffini.....	158
9.2 - Raízes ou zeros de um polinômio.....	150	9.10 - Dispositivo prático.....	158
9.3 - Polinômio idênticamente nulo.....	151	9.11 - Divisão por $bx + a$	160
9.4 - Polinômios idênticos....	151	9.12 - Desenvolvimento de um polinômio $P(x)$ segundo as potências de um binômio $x - a$	160
9.5 - Condições de identidade	151	9.13 - Algoritmo de Ruffini-Horner.....	161
9.6 - Método dos coeficientes a determinar.....	153	9.14 - Fórmula de Taylor para os polinômios.....	162
9.7 - Divisão por $x - a$	157		
9.8 - Cálculo do resto.....	157		

10) EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

10.1 - Forma canônica.....	167	10.5 - Número de raízes.....	170
10.2 - Teorema fundamental da Álgebra.....	167	10.6 - Raízes nulas.....	170
10.3 - Decomposição de um polinômio em fatores binômios.....	168	10.7 - Raízes complexas.....	171
10.4 - Raízes múltiplas.....	169	10.8 - Relações entre os coeficientes e as raízes.....	172
		10.9 - Aplicações.....	173
		10.10 - Raízes racionais.....	174

11) EQUAÇÕES TRANSFORMADAS

11.1 - Equação transformada..	179	11.4 - Caso particular.....	184
11.2 - Transformação aditiva..	180	11.5 - Transformação recíproca	185
11.3 - Transformação multiplicativa.....	182	11.6 - Transformações compostas.....	185

12) CÁLCULO DAS RAÍZES INTEIRAS

12.1 - Raízes inteiras.....	189	das raízes reais. Método de Laguerre.....	192
12.2 - Raízes reais contidas num intervalo. Teorema de Bolzano.....	189	12.5 - Regras de exclusão de Newton.....	194
12.3 - Consequências.....	191	12.6 - Algoritmo de Peletarius	195
12.4 - Determinação das cotas		12.7 - Cálculo das raízes inteiras	197

13) EQUAÇÕES RECÍPROCAS

13.1 - Definição	200	13.3 - Forma normal.....	202
13.2 - Condições para que uma equação seja recíproca. Classificação.....	200	13.4 - Redução à forma normal	202
		13.5 - Resolução das equações recíprocas.....	204

ÍNDICE DOS EXERCÍCIOS

1. Funções. Gráficos.....	30
2. Limites.....	56
3. Continuidade.....	57
4. Equação da linha reta.....	80
5. Equação da circunferência.....	89
6. Derivadas.....	113
7. Máximos e mínimos.....	126
8. Integrais.....	136
9. Números complexos.....	148
10. Identidade de polinômios.....	156
11. Divisão por $x - a$	165
12. Fórmula de Taylor.....	165
13. Equações algébricas.....	177
14. Equações transformadas.....	186
15. Cálculo das raízes inteiras.....	198
16. Equações recíprocas.....	206
17. Questões de Concurso.....	209

MATEMÁTICA

1.1 - Intervalo. Dados dois números reais a e b , sendo $a < b$, chama-se **intervalo** o conjunto de todos os números reais desde a até b .

Os números a e b são os **extremos** do intervalo; o primeiro é *extremo inferior* e o segundo, *extremo superior*.

Os extremos podem pertencer ou não ao conjunto, daí os diferentes tipos de *intervalo*:

1.º) Os extremos pertencem ao conjunto — **intervalo fechado**.

Assim, *intervalo fechado* entre a e b é o conjunto constituído pelo número a , pelo número b e todos os números reais x compreendidos entre a e b . Representa-se de um dos modos:

$$[a, b] \text{ ou } a \leq x \leq b$$

Lê-se: intervalo fechado a, b .

Exemplo:

O intervalo $[2, 7]$ ou $2 \leq x \leq 7$, compreende o número 2, o número 7 e todos os números reais maiores que 2 e menores que 7, simultaneamente.

2.º) Os extremos não pertencem ao conjunto — **intervalo aberto**. O conjunto abrange apenas os números ao mesmo

tempo maiores que a e menores que b , estando excluídos a e b . Representa-se com os símbolos:

$$]a, b[\text{ ou } a < x < b$$

3.º) **Intervalo aberto à esquerda** — quando o extremo inferior não pertence ao conjunto, o qual contém o número b e os números simultaneamente maiores que a e menores que b .

Notação:

$$]a, b] \text{ ou } a < x \leq b$$

4.º) **Intervalo aberto à direita** — quando o extremo superior não pertencer ao conjunto:

$$[a, b[\text{ ou } a \leq x < b$$

AMPLITUDE do intervalo $[a, b]$ é a diferença $b - a$, entre os extremos.

INTERVALOS INFINITOS: Por extensão, diz-se que os números superiores ou iguais a b pertencem ao intervalo $[b, +\infty[$.

Analogamente, os números inferiores ou iguais a b pertencem ao intervalo $]-\infty, b]$.

Finalmente, todos os números reais serão indicados pelo intervalo $]-\infty, +\infty[$.

Exemplo:

$]-\infty, 0[$ define o conjunto dos números reais negativos.

1.2 — **Variável. Constante.** Suponhamos o conjunto, C , dos números naturais:

$$C = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Se representarmos pela letra x um elemento qualquer, não especificado, dêsse conjunto, diremos que x é uma *variável*.

Variável é, pois, um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto numérico.

Um elemento de C , 4, por exemplo, é um **valor** de x ; dizemos então, que x *assumiu* ou *tomou* o valor 4.

O símbolo usado, geralmente, para representar uma variável é uma das últimas letras do alfabeto: $z, y, x, \dots$

O conjunto dos elementos representados pela variável chama-se **domínio** ou **campo de variação** da variável.

Assim, no nosso exemplo, o *domínio* da variável x é o conjunto dos números naturais.

Variável real é a que tem para *domínio* um conjunto de números reais.

Constante é a quantidade que tem um valor fixo. Pode ser *constante absoluta* como os números 3, π , etc. ou *constante arbitrária* (parâmetro) como a, b e c no trinômio $ax^2 + bx + c$, as quais, em cada trinômio, têm valores fixos.

1.3 — **Variável progressiva. Variável contínua.** Uma variável é **contínua** quando seu domínio é constituído por todos os números reais de um intervalo $[a, b]$.

A variável é **progressiva** quando seu domínio é constituído apenas para certos valores de um intervalo. Assim, se uma variável pode tomar apenas *valores inteiros* do intervalo $[3, +\infty[$, será uma variável progressiva.

1.4 — **Representação gráfica duma variável real contínua.** Consideremos um eixo $x'x$ (fig. 1) de origem O e unidade $\overline{OI} = +1$.

Ao ponto A corresponde o número real a , medida algébrica do segmento OA , e denominado abscissa do ponto. Reciprocamente, a um número real b corresponde um ponto B .

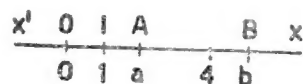


Fig. 1

Há, desse modo, uma correspondência bi-unívoca entre os valores de uma variável real e os pontos do eixo. Para designar um valor de x , por exemplo, 4, diremos indiferentemente: o valor 4 de x ou ponto 4.

OBSERVAÇÃO: O intervalo $[a, b]$ é representado graficamente pelo segmento AB .

1.5 — Função. Suponhamos o conjunto (C) dos números naturais

$$C = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

e seja x a variável do conjunto C .

Consideremos um segundo conjunto (C') constituído dos números pares

$$C' = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

e seja y a variável do conjunto C' .

A cada valor de x , do conjunto C , corresponde um valor de y , do conjunto C' . O valor correspondente de y é definido pela equação:

$$y = 2x \quad (1)$$

Essa correspondência que associa a cada valor x de C , um único valor y de C' , definido pela equação (1), é que nos dá o conceito de **função**.

Assim, o conceito de *função* acarreta a existência de, pelo menos, *duas variáveis*, e uma correspondência.

A primeira variável (x no nosso exemplo) denomina-se *variável independente*, *livre* ou *arbitrária* porque podemos atribuir-lhe um valor qualquer de seu domínio; a segunda denomina-se *dependente* porque seu valor *depende* do que foi atribuído à primeira, pela lei de correspondência funcional.

1.6 — Função real de variável real. Quando os domínios C e C' das variáveis x e y são dois conjuntos de números reais a função denomina-se *função real de variável real*.

O conjunto C (da variável x) é o **DOMÍNIO** da função.

O conjunto C' (da variável y) é o **CONTRA-DOMÍNIO** da função.

No nosso exemplo temos:

Domínio: números naturais

Contra-domínio: números pares

Correspondência: $y = 2x$

1.7 — Notação funcional. Exprime-se que y é função de x ou uma aplicação do conjunto X no conjunto Y , pela notação

$$f : X \rightarrow Y$$

Domínio: X

Contra-domínio: Y

Correspondência: $y = f(x)$

O valor particular da função para um valor a de x , ou no ponto a , indica-se pela notação

$$f(a)$$

Exemplo:

Se $f(x) = x^2 - 3x + 2$, tem-se:

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 & f(1) &= 1 - 3 + 2 = 0 \\ f(2) &= 4 - 6 + 2 = 0 & f(3) &= 9 - 9 + 2 = 2 \end{aligned}$$

e, assim por diante.

1.8 - Função definida em um ponto. Uma função

$$f: x \rightarrow y$$

é definida em um ponto a (isto é, para o valor $x=a$) quando $f(a)$ é um número *real, finito e determinado*.

Exemplos:

A função $y = f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ não é definida no ponto 1 porque para $x = 1$, tem-se

$$f(1) = \frac{4}{0}$$

que não tem significado numérico.

A mesma função é definida para os demais valores reais de x .

Assim, o domínio da função é o conjunto dos números reais, *exceto* um.

Dêse modo, uma função pode ser representada apenas pela correspondência: $y=f(x)$, subentendendo-se ser seu domínio constituído pelos valores reais de x compatíveis com a dependência.

1.9 - Função definida num intervalo. Uma função é definida no intervalo $[a, b]$, quando é definida em todos os pontos desse intervalo.

A função do exemplo anterior é definida no intervalo aberto $]1, +\infty[$ e também no intervalo $]-\infty, 1[$, pois, só não é definida no ponto 1.

Para definir uma função é pois necessário:

1.º) Conhecer a lei de dependência.

2.º) Determinar o **domínio** da variável livre para o qual o *contra-domínio* é real, finito e determinado, também chamado **campo de existência da função** ou **campo de definição**.

Exemplos:

1.º) Achar o domínio da variável em:

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

Resolução. Para que y seja real, o radicando deve ser positivo ou nulo; logo, devemos ter:

$$9 - x^2 \geq 0 \quad \therefore \quad x^2 \leq 9$$

e, portanto, $|x| \leq 3$

e o domínio da variável será o intervalo fechado:

$$-3 \leq x \leq 3 \quad \text{ou} \quad [-3, 3]$$

2.º) O domínio da variável na função

$$y = \frac{1}{x}$$

é constituído por todos os valores reais de x exceto zero, pois $\frac{1}{0}$ não é definido e, portanto, será representado pelos dois intervalos abertos:

$$]0, +\infty[\quad \text{e} \quad]-\infty, 0[$$

1.10 - Classificação das funções.

a) Quanto à forma as funções podem ser: *implícitas* e *explícitas*.

- 1.º) Diz-se que y é uma **função explícita** de x quando é expressa por uma equação resolvida em relação a y , como, por exemplo:

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

Estão claras as operações a efetuar com a variável livre x para obter a função y .

- 2.º) A **função é implícita** em caso contrário, como

$$3y + x^2 = 3$$

onde a equação em x e y não está resolvida.

Resolvendo-se a equação em relação a y , passa-se para a forma explícita:

$$y = \frac{3 - x^2}{3}$$

- b) Quanto à determinação: *uniformes e multiformes*.

- 1.º) **Função uniforme** ou *unívoca* — quando a cada valor da variável livre corresponde *um único valor* da função.

Exemplos:

$$y = ax + b, y = \sin x$$

- 2.º) **Função multiforme** ou *plurívoca* — quando a cada valor da variável livre correspondem vários valores da função.

Exemplos:

$$y = \pm \sqrt{x^2 - 1}, y = \operatorname{artg} x$$

- c) Quanto às operações que ligam as variáveis: *algébricas e transcendentais*.

- 1.º) **Função algébrica** é a que, escrita com a forma explícita:

$$y = f(x)$$

o segundo membro é formado por somas, produtos, quocientes e raízes (operações algébricas) de polinômios em x .

Exemplos:

$$y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}; y = \frac{7x}{x + 1}; y = x^2 - 3$$

- 2.º) **Função transcendente** — quando não é algébrica.

As chamadas *elementares* deste grupo, são:

exponencial..... $y = a^x$

logarítmica..... $y = \log x$

circulares diretas.... $y = \sin x$, etc.

circulares inversas... $y = \arcsin x$, etc.

- d) Classificação das **funções algébricas**.

Escrita uma função algébrica com a forma explícita:

$$y = f(x)$$

sua classificação se faz do mesmo modo que o polinômio em x do segundo membro. Assim, temos, em resumo:

$$\text{FUNÇÕES ALGÉBRICAS} \begin{cases} \text{RACIONAIS} \begin{cases} \text{inteiras. Ex.: } y = 3x^2 - 5x + 7 \\ \text{fracionárias. Ex.: } y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1} \end{cases} \\ \text{IRRACIONAIS. Ex.: } y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1}; y = 3 + \sqrt{x - 1} \end{cases}$$

1.11 - Funções inversas. Dada uma função

$$y = f(x)$$

se a resolvermos em relação a x , obteremos uma segunda função

$$x = \varphi(y)$$

que se diz **inversa** da primeira.

Assim, duas funções são inversas quando o domínio da primeira é o contra-domínio da segunda e reciprocamente.

Exemplo:

$y = x^3$ e $x = \sqrt[3]{y}$ são funções inversas.

1.12 — Funções periódicas. São denominadas periódicas as funções cujos valores da *variável dependente* se repetem para valores da *variável livre* que diferem de uma constante, denominada *período*.

Exemplo:

A função $y = \sin x$

cujos valores se repetem de 2π em 2π radianos, é uma função periódica de período 2π .

1.13 — Funções pares e ímpares. Uma função diz-se par quando seu valor não se altera ao se trocar o sinal da *variável livre*.

Exemplo:

$y = \cos x$, pois $\cos(-x) = \cos x$

A função é ímpar quando muda de sinal, ao se trocar x por $-x$.

Exemplo:

$y = \sin x$ que dá $\sin(-x) = -\sin x = -y$

1.14 — Função de função. Se na função $y = f(x)$ em lugar de ser x variável livre é, por sua vez, função de outra variável independente u , isto é, $x = \varphi(u)$, diz-se que y é uma *função de função* e escreve-se:

$$y = f[\varphi(u)]$$

1.15 — Representação gráfica das funções.

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA.

I) **Coordenadas cartesianas de um ponto.** Suponhamos dois eixos perpendiculares $x'x$ e $y'y$ com origem comum no

ponto 0 (zero); o primeiro, orientado no sentido positivo Ox e o segundo no sentido Oy , sendo $OI = +1$ a unidade.

Consideremos, então, um ponto qualquer A do plano projetado sobre os dois eixos em P e Q , respectivamente (fig. 2).

Ao ponto P corresponde o número $+3$ que se denomina *abscissa* do ponto A ; ao ponto Q corresponde o número $+4$, denominado *ordenada* do ponto A .

Aos dois números dá-se o nome genérico de *coordenadas* do ponto A .

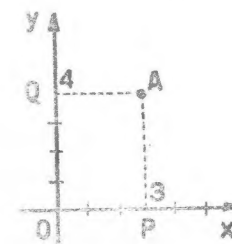


Fig. 2

Conclui-se:

A todo ponto do plano correspondem dois números relativos que são suas coordenadas (coordenadas cartesianas ou ortogonais, no caso dos eixos perpendiculares).

Assim, na figura 3, ao ponto B correspondem os números -2 (abscissa) e $+4$ (ordenada).

Escreve-se $(-2, +4)$, colocando sempre a abscissa em primeiro lugar. Da mesma forma, temos, na figura 3:

$A (3, 5)$; $B (-2, 4)$; $C (-5, -3)$; $D (2, -4)$

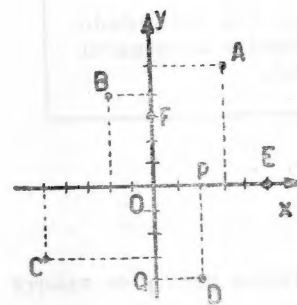


Fig. 3

Reciprocamente, a um sistema de dois números relativos corresponde sempre um único ponto do plano. Assim, para marcar o ponto que corresponde ao par $(2, -4)$, tomaremos 2 unidades (fig. 3) para direita sobre $x'x$, de O a P , e 4 unidades para baixo sobre o eixo dos y , de O a Q . A intersecção das perpendiculares aos eixos, levantadas de P e Q , determina o ponto D .

CASOS PARTICULARES.

- 1.º) As coordenadas da origem são $(0, 0)$.
- 2.º) Qualquer ponto do eixo dos x tem ordenada nula :
 $E(5, 0)$ na figura 3.
- 3.º) Qualquer ponto do eixo do y tem abscissa nula :
 $F(0, 3)$ na figura 3.

II) Representação gráfica de uma função. Dada a função

$$y = f(x)$$

definida num certo domínio $[a, b]$ da variável x , a cada valor $x_1, x_2, x_3, \dots$, desse domínio, corresponderá um valor de y : $y_1, y_2, y_3, \dots$

Cada par de valores correspondentes, x_1, y_1 , etc., pode ser representado por um ponto do plano de abscissa x_1 e ordenada y_1 .

Procedendo desse modo para um número suficiente de pontos, estes formarão uma curva que se denomina o gráfico da função.

Assim podemos definir :

Gráfico de uma função $y = f(x)$ é a totalidade dos pontos $P(x, y)$, cujas coordenadas satisfazem à equação $y = f(x)$.

Exemplo :

Gráfico da função $y = x^3$.

Atribuindo a x valores arbitrários obteremos para y os valores da tábua de correspondência abaixo.

Tábua de correspondência

x	y
.	.
.	.
.	.
-2	-8
-1	-1
0	0
+1	1
+2	8
.	.
.	.
.	.

Gráfico

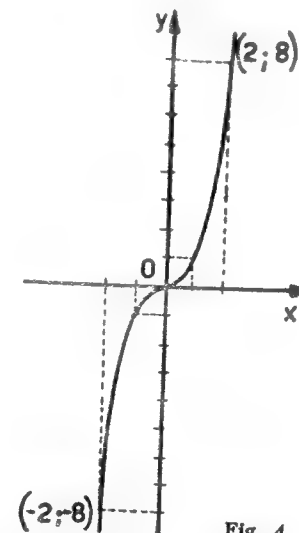


Fig. 4

Os pontos correspondentes aos pares ordenados (x, y) serão (fig. 4): $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(2, 8)$, $A_1(-1, -1)$, $B_1(-2, -8)$ etc., que, unidos, dão o gráfico da figura 4.

1.16 – Gráfico das funções usuais.

1.º) Função exponencial: $y = a^x$

Sendo a um número positivo, diferente de 1, a função $y = a^x$

denomina-se função exponencial.

No estudo da variação e gráfico desta função, consideraremos dois casos.

1.º CASO : $a > 1$. Exemplo : $y = 2^x$

Tábua de correspondência

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...

O gráfico fica situado inteiramente acima do eixo dos x porque qualquer que seja x , y é sempre positivo (fig. 5).

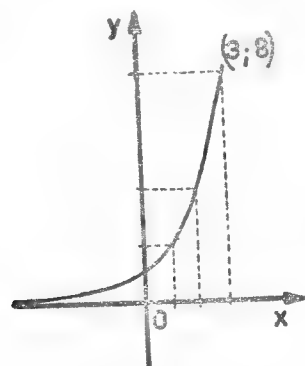


Fig. 5

Como a sucessão de valores de y

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

decrece sempre mais, tendendo para zero, observa-se que a curva aproxima-se sempre mais do eixo dos x sem o atingir.

O gráfico possui um único ramo ascendente da esquerda para a direita.

2.º CASO :

$$a < 1. \text{ Exemplo: } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Tábua de correspondência

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8	...

Obtém-se o gráfico da figura 6 podendo observar-se que a curva tem os pontos simétricos do gráfico anterior, em relação ao eixo $y'y$.

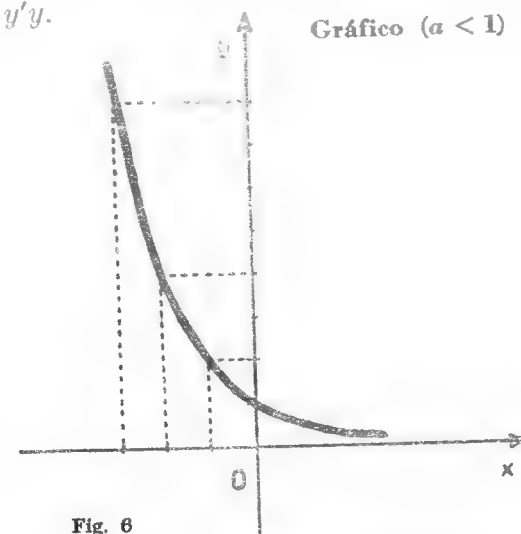


Fig. 6

OBSERVAÇÃO: Para $a = 1$, teremos, qualquer que seja x :
 $y = 1$
 e o gráfico será uma reta paralela a $x'x$.

2.º) Função logarítmica: $y = \log_a x$

Sabemos que só têm logaritmo os números positivos; assim, o domínio da variável será o intervalo $[0, +\infty[$.

Além disso, temos, para qualquer base :

$$\log_a 1 = 0 \text{ e } \log_a a = 1$$

Isto posto, podemos considerar dois casos gerais :

1.º CASO : $a > 1$.

Quadro de correspondência

x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

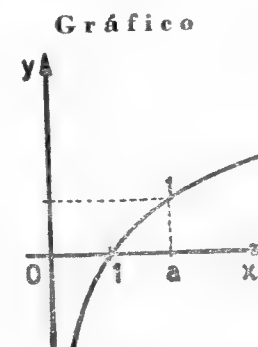


Fig. 7

Gráfico

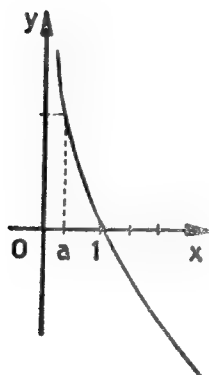


Fig. 8

2.º CASO : $a < 1$.

Quadro de correspondência

x	0	$\nearrow$	a	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Exemplo :

Gráfico da função $y = \log_2 x$

Quadro

x	y
0	$-\infty$
1	0
2	1
4	2
8	3
$\vdots$	$\vdots$
$+\infty$	$+\infty$

Gráfico

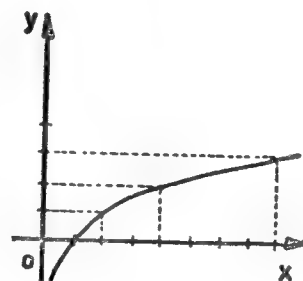


Fig. 9

3.º) Funções circulares diretas.

I) Função seno: $y = \sin x$. Conhecemos a variação do seno que pode ser resumida no quadro seguinte:

arco x	$\dots$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\dots$
$y = \sin x$		0	$\nearrow$ +1 $\searrow$	0	$\searrow$ -1 $\nearrow$	0	$\dots$

Como a função é periódica os valores obtidos repetem-se nos intervalos $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$, etc.

Para traçar o gráfico (fig. 10) tomemos como eixo dos x o suporte do diâmetro $A'A$ e fixemos a origem do eixo em A . Para eixo dos y tomemos a tangente $y'y$ no ponto A , com a mesma origem A .

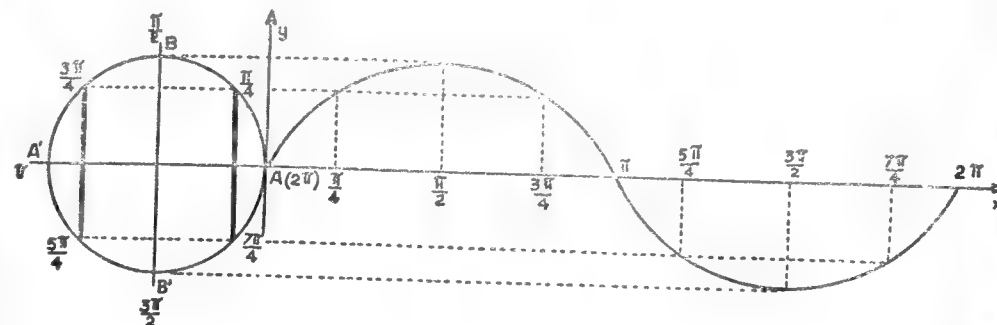


Fig. 10

Sobre o eixo $x'x$ retifiquemos a circunferência em $A, 2\pi$ e dividamo-la em oito partes iguais. A cada ponto de divisão façamos corresponder uma ordenada de medida algébrica igual ao valor do seno. Unindo as extremidades dessas ordenadas, a curva obtida, denominada *senóide*, é o gráfico de variação do seno.

II) Função co-seno: $y = \cos x$. É conhecido o quadro de variação do co-seno:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\dots$
$y = \cos x$	+1	$\searrow$ 0 $\searrow$	-1	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	+1	$\dots$

Se procedermos como no caso anterior do seno e marcarmos ordenadas de medida algébrica igual aos valores do cosseno obteremos o gráfico da figura 11.

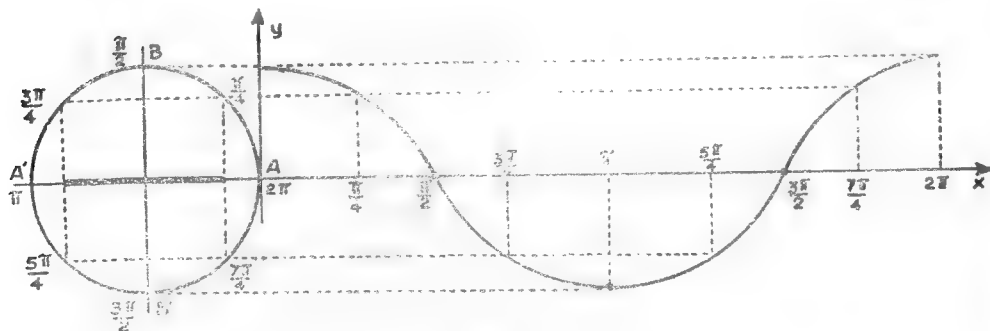


Fig. 11

EXERCÍCIOS

1. Representar simbolicamente (intervalo) todos os números reais de 8 a 100, excluídos estes números.
2. Representar simbolicamente os números reais de -7 a 23, incluídos estes números.
3. Representar o intervalo de todos os números reais de 2, exclusive, até 97 inclusive.
4. Representar o intervalo dos números reais de -17, inclusive, até -3, exclusive.
5. Representar simbolicamente (por um intervalo) todos os números reais de módulo igual ou menor que 3.
6. Dada $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$, calcular: $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(a+1)$.
Resp.: -2, -8, -8, $a^3 - 2a^2 - 5a - 2$, $a^3 + a^2 - 6a - 8$
7. Verificar se as funções $y = \sqrt{1-x^2}$ e $y = \frac{x^2+1}{x^2-6x+8}$ são definidas no ponto 2.
Resp.: não
8. A função $y = \tan x$ é definida para $x = \frac{\pi}{2}$? Resp.: não

Achar o domínio da variável nas funções:

9. $y = \sqrt{4-x^2}$. Resp.: $[-2, 2]$
10. $y = \frac{1}{x-1}$. Resp.: $]-\infty, 1[$ e $]1, +\infty[$

11. $y = \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}$. Resp.: $(-\infty, -a)$, $(-a, +a)$, $(+a, +\infty)$
12. $y = \sqrt{1-\sin x}$. Resp.: $(-\infty, +\infty)$
13. $y = \frac{x^2+1}{x^2-12x+35}$. Resp.: $(-\infty, 5)$, $(5, 7)$, $(7, +\infty)$
14. $y = \sqrt{\frac{x-3}{x+5}}$. Resp.: $(3, \infty)$ e $(-\infty, -5)$
15. $y = \sqrt{x^2-5x+36}$. Resp.: $(-\infty, +\infty)$
16. $y = \sqrt{-2x^2+5x-2}$. Resp.: $[\frac{1}{2}, 2]$
17. $y = \arcsin \frac{x}{3}$. Resp.: $-3 \leq x \leq 3$
18. $y = \sqrt{-x^2-x-4}$. Resp.: Não existe.
19. $y = \sqrt{-(1-x)^2}$. Resp.: $x = 1$

Classificar as funções:

20. $y = x^2 - 5x + 6$
21. $3x^2y + 2xy - 5 = 0$
22. $y = \frac{x}{\sin x}$
23. $y = (x+1) \log(x-1)$
24. $x^2y + xy^3 = 3$
25. $y = \frac{x^3+1}{x^2-4}$

Passar para a forma explícita:

26. $x^2y - 5xy - 7 = 0$. Resp.: $y = \frac{7}{x^2-5x}$
27. $x^3 + 2x^2y + 3y - 1 = 0$. Resp.: $y = \frac{1-x^3}{2x^2+3}$
28. $3x - y - 4 = 0$. Resp.: $y = 3x - 4$
29. $y = \frac{x^2+1}{3}$. Resp.: $x^2 - 3y + 1 = 0$
30. $y = \frac{x}{1+x}$. Resp.: $xy - x + y = 0$

Escrever as funções inversas:

31. $y = \sqrt{3x-1}$. Resp.: $x = \frac{y^2+1}{3}$
32. $y = \log_a x$. Resp.: $x = a^y$
33. $y = \frac{x+1}{x-1}$. Resp.: $x = \frac{y+1}{y-1}$
34. $y = x^3$. Resp.: $x = \sqrt[3]{y}$

Representar gráficamente as funções :

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| 35. $2x - 3y = 1$ | 41. $y = 3^{-x}$ no int. $[-3, 3]$ |
| 36. $y = -4x^2$ | 42. $y = 3 \cos x$ |
| 37. $y = x^3 + 1$ | 43. $y = 1 + \sin x$ |
| 38. $y = \log_3 x$ no int. $[0, 27]$ | 44. $y = 3x - 5$ |
| 39. $x^2 + y^2 = 25$ | 45. $y = \cot x$ |
| 40. $y = \tan x$ | |

Verificar se os pontos especificados à direita pertencem ou não ao gráfico da função correspondente :

- | | | |
|---|-----------------|--------------------------|
| 46. $x - 2y + 5 = 0$ | (2, 4), (3, 4) | Resp.: o segundo |
| 47. $y = 4^x$ | (0, 1), (2, 16) | Resp.: ambos |
| 48. Achar os valores de a e b de modo que os pontos (1, 4) e (-6, 1) pertençam ao gráfico da função $ax^2 + by^2 = 115$ | | Resp.: $a = 3$, $b = 7$ |
| 49. Dada $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, calcular $f[f(x)]$ | | Resp.: $f[f(x)] = x$ |

2

limites . continuidade

2.1 - Limite de uma variável. Consideremos uma variável x que assuma uma sucessão de valores de seu domínio : $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, de tal modo que o valor absoluto da diferença $x - a$, torne-se e permaneça menor que um número positivo, ϵ , tão pequeno quanto quisermos, isto é :

$$|x - a| < \epsilon$$

Diz-se, então, que a variável x tem para limite a ou x tende para a .

Escreve-se : $\lim x = a$ ou $x \rightarrow a$

e lê-se : o limite de x é igual a a ou x tende para a .

Assim, para indicar que o limite da variável x é a constante a , podemos escrever com o mesmo sentido :

$$\lim x = a, \quad x \rightarrow a, \quad |x - a| < \epsilon \quad \text{ou} \quad -\epsilon < x - a < \epsilon$$

Exemplos :

1.º) Suponhamos que a variável x assuma valores de seu domínio representados pela dízima periódica $2,99\dots$, quando acrescentamos sempre um período a mais.

Consideremos a constante 3 e formemos as diferenças

$$\begin{aligned} 3 - 2,9 &= 0,1 \\ 3 - 2,99 &= 0,01 \\ 3 - 2,999 &= 0,001 \end{aligned}$$

Assim, por menor que seja ϵ , podemos ter :

$$|3 - x| < \epsilon$$

bastando tomar na variável x um número suficiente de períodos e, portanto, teremos:

$$\lim x = 3 \quad \text{ou} \quad \lim 2,99 \dots = 3$$

2.º) Seja a variável x assumindo os valores de seu domínio 2,1; 2,01; 2,001; ...

Se considerarmos a constante 2, poderemos formar as diferenças:

$$2,1 - 2 = 0,1$$

$$2,01 - 2 = 0,01$$

$$2,001 - 2 = 0,001$$

Por menor que seja ϵ , poderemos ter:

$$|x - 2| < \epsilon$$

bastando, para isso, tomar um número suficiente de zeros.

2.2 — Tendência da variável para seu limite. Uma variável pode tender para o limite de três modos diferentes.

1.º) *Por valores sempre inferiores ao limite.* Como no nosso primeiro exemplo em que $2,99 \dots < 3$.

Indica-se essa tendência por valores inferiores com o símbolo:

$$x \rightarrow 3^-$$

2.º) *Por valores sempre superiores ao limite.* Como no nosso segundo exemplo em que $2,0 \dots 01 > 2$.

Indica-se essa tendência com o símbolo:

$$x \rightarrow 2^+$$

3.º) *Por valores ora superiores ora inferiores ao limite:*

Consideremos a soma, variável com o número de termos:

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$$

cujas parcelas estão em progressão geométrica de razão $-\frac{1}{3}$.

O limite de S será:

$$\lim S = \lim \left(1 + \frac{1}{9} + \dots \right) = \lim \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{27} + \dots \right)$$

ou

$$\lim S = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Considerando os valores sucessivos de S teremos:

$$S_1 = 1 > \frac{3}{4}$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9} > \frac{3}{4} \text{ etc.}$$

Assim, as somas sucessivas tendem para $3/4$ ora por valores superiores, ora inferiores.

2.3 — Limite infinito. Uma variável x tem limite infinito quando, dado um número M , por maior que seja, existe um valor x_1 tal que, para todos os valores do domínio de x que se seguem a x_1 , se tenha

$$|x| > M$$

Se os valores de x são positivos representaremos o limite infinito pelo símbolo

$$\lim x = +\infty \quad \text{ou} \quad x \rightarrow +\infty$$

Se os valores de x são negativos:

$$\lim x = -\infty \quad \text{ou} \quad x \rightarrow -\infty$$

O símbolo ∞ traduz um modo de variação e não é, portanto, um símbolo numérico.

2.4 — Infinitésimos. *Infinitésimo* ou *infinitamente pequeno* é a variável que tem como limite zero, e cujos valores são considerados apenas na vizinhança do limite.

Representaremos o infinitésimo pela letra grega ϵ (épsilon).

2.5 — Propriedades dos limites.

1.ª) O limite de uma constante é a própria constante.

Pela definição, tem-se: $\lim a = a$.

2.ª) Uma mesma variável não pode ter dois limites distintos.

Suponhamos que tivéssemos:

$$\lim x = a \quad |x - a| < \epsilon$$

ou

$$\lim x = b \quad |x - b| < \epsilon \quad \text{e} \quad a \neq b \quad (1)$$

Consideremos, então, a igualdade:

$$a - b = (x - b) - (x - a)$$

Como o módulo da diferença é, no máximo, igual à soma dos módulos do minuendo e do subtraendo:

$$|a - b| \leq |x - b| + |x - a|$$

e viria, de acôrdo com as igualdades (1):

$$|a - b| \leq \epsilon$$

Assim, concluiríamos: $\lim a = b$, o que é absurdo.

2.6 — Operações com limites.

1.ª) O limite de uma soma algébrica de variáveis é igual à soma algébrica dos limites das variáveis, desde que o número de parcelas seja limitado.

Tese: $\lim (x + y + z) = \lim x + \lim y + \lim z$.

Demonstração.

Sejam:

$$\lim x = a, \quad \lim y = b, \quad \lim z = c \quad (1) (*)$$

Isto é, podemos escolher um certo ϵ para o qual se tenha:

$$-\frac{\epsilon}{3} < x - a < \frac{\epsilon}{3}$$

$$-\frac{\epsilon}{3} < y - b < \frac{\epsilon}{3}$$

$$-\frac{\epsilon}{3} < z - c < \frac{\epsilon}{3}$$

(*) Admitimos o postulado: "A soma de um número finito de infinitésimos é um infinitésimo".

Somando, membro a membro:

$$-\epsilon < (x + y + z) - (a + b + c) < \epsilon$$

donde resulta:

$$\lim (x + y + z) = a + b + c$$

ou, em virtude de (1):

$$\lim (x + y + z) = \lim x + \lim y + \lim z$$

CASOS PARTICULARES.

a) A variável x tem limite infinito e y tem limite finito, isto é, mantém o valor absoluto inferior a uma constante k .

Se x variar por valores positivos, podemos escrever por maior que seja M , em virtude da hipótese:

$$x > M + k \\ -k < y < k$$

Somando:

$$x + y > M \quad \therefore \quad \lim (x + y) = +\infty$$

Simbolicamente escreve-se: $k + \infty$ ou $+\infty + k = +\infty$.

Se x variar por valores negativos, teremos, análogamente:

$$x < -M - k \\ -k < y < k$$

Somando:

$$x + y < -M \quad \therefore \quad \lim (x + y) = -\infty$$

Simbolicamente escreve-se: $k - \infty$ ou $-\infty + k = -\infty$.

b) Se as variáveis x e y tendem ambas para $+\infty$, ou ambas para $-\infty$, a soma tende para o mesmo limite.

De acôrdo com a hipótese temos, por maior que seja M , x e y variando por valores positivos.

$$x > \frac{M}{2}$$

$$y > \frac{M}{2}$$

donde

$$x + y > M \quad \text{e} \quad \lim (x + y) = +\infty$$

Simbolicamente, escreve-se: $+\infty + \infty = +\infty$
 $-\infty - \infty = -\infty$.

2.ª) O limite de um produto de variáveis é igual ao produto dos limites das variáveis, desde que o número de fatores seja limitado.

Tese: $\lim (xy) = \lim x \cdot \lim y$.

Demonstração.

Sejam:

$$\lim x = a \quad \text{e} \quad \lim y = b$$

$$\text{isto é:} \quad |x - a| < \epsilon \quad \text{e} \quad |y - b| < \epsilon$$

o que permite concluir por definição:

$$\lim (x - a) = 0 \quad \text{e} \quad \lim (y - b) = 0 \quad (1)$$

Isto pôsto, consideremos a igualdade:

$$xy - ab = x(y - b) + b(x - a)$$

E, em virtude das condições (1):

$$\lim (xy - ab) = 0$$

$$\text{donde:} \quad \lim xy = ab = \lim x \cdot \lim y$$

CASO PARTICULAR.

A variável x tem limite ∞ e y mantém o valor absoluto superior a uma constante $k > 0$ (k não pode ser zero).

Neste caso, por maior que seja M , teremos:

$$|x| > \frac{M}{k}$$

$$|y| > k$$

$$|xy| = |x| \cdot |y| > M$$

Logo:

$$\text{e, portanto:} \quad \lim (xy) = \infty.$$

Simbolicamente escreve-se: $k \infty = \infty$ ($k \neq 0$).

3.ª) O limite do quociente de duas variáveis é igual ao quociente dos limites das mesmas variáveis, desde que o limite do divisor seja diferente de zero.

$$\text{Tese:} \quad \lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y} \quad \text{com} \quad \lim y \neq 0.$$

Demonstração.

$$\text{Seja o quociente} \quad \frac{x}{y} = z \quad (1)$$

$$\text{isto é:} \quad x = y \cdot z$$

De acôrdo com a propriedade do produto:

$$\lim x = \lim y \cdot \lim z$$

e, portanto, se fôr $\lim y \neq 0$:

$$\lim z = \frac{\lim x}{\lim y}$$

ou, em virtude de (1):

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y} \quad \text{com} \quad \lim y \neq 0$$

CASOS PARTICULARES.

a) O divisor tem limite infinito e o dividendo, finito, isto é, tem valor absoluto menor que um número fixo k .

Neste caso, o limite do quociente é zero.

Realmente, na hipótese, tem-se

$$|x| < k$$

$$|y| > M$$

Logo, virá:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} < \frac{k}{M}$$

A fração $\frac{k}{M}$ varia no sentido contrário do denominador e como este pode ser tão grande quanto quisermos, e o numerador é constante, teremos:

$$\frac{k}{M} < \epsilon$$

portanto:

$$\left| \frac{x}{y} \right| < \epsilon$$

donde

$$\lim \frac{x}{y} = 0$$

Simbolicamente, escreve-se: $\frac{k}{\infty} = 0$.

b) O dividendo mantém o valor absoluto maior que uma constante $k > 0$ e o divisor tem limite zero.

Neste caso, o limite do quociente é infinito.

Na hipótese, teremos:

$$\begin{aligned} |x| &> k \\ |y| &< \epsilon \end{aligned}$$

Logo, vem:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} < \frac{k}{\epsilon}$$

O numerador k é fixo e o denominador ϵ pode tornar-se tão pequeno quanto quisermos, como a fração varia na razão inversa do denominador, conclui-se que $\frac{k}{\epsilon}$ cresce indefinidamente e, portanto:

$$\lim \frac{x}{y} = \infty$$

Simbolicamente escreve-se:

$$\frac{k}{0} = \infty$$

4.ª) O limite dum potência de expoente inteiro é igual à potência de mesmo expoente do limite da variável.

Demonstração.

Seja: $u^m = u \cdot u \dots u$

Logo:

$$\lim u^m = \lim u \lim u \dots \lim u = (\lim u)^m$$

5.ª) O limite da raíz de uma variável é a raíz do mesmo índice do limite da variável.

Demonstração.

Seja: $\lim x = a$

Temos: $(\sqrt[m]{x})^m = x$

Logo: $\lim (\sqrt[m]{x})^m = \lim x = a$

Mas, de acôrdo com o limite da potência:

$$\lim (\sqrt[m]{x})^m = (\lim \sqrt[m]{x})^m$$

Logo, vem: $(\lim \sqrt[m]{x})^m = a$
 $\therefore \lim \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{\lim x}$

2.7 - Limite de uma função. Seja a função

$$y = 1 + x$$

cujo domínio é $(-\infty, +\infty)$.

Se atribuírmos à variável livre x os valores sucessivos de seu domínio:

2,9 2,99 2,999... cujo limite é 3, isto é: $|x - 3| < \epsilon$

os valores correspondentes de y serão:

3,9 3,99 3,999... cujo limite é 4, isto é: $|y - 4| < \delta$

sendo δ arbitrariamente pequeno e ϵ , suficientemente pequeno.

Diz-se, então, que a função y tem o limite 4 quando x tende para 3, e escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow 3} y = 4$$

Observe-se que nada se afirma sobre $f(3)$.

Esta definição equivale a dizer:

Uma função $y = f(x)$, tem um limite b quando a variável x tende para a se, a um positivo δ , arbitrariamente pequeno, corresponde um positivo ϵ tal que, para

$$\begin{aligned} &|x - a| < \epsilon \text{ e } x \neq a, \\ \text{se tenha } &|y - b| < \delta \end{aligned}$$

Em particular, se o limite da variável x é infinito (pois nenhuma restrição foi imposta ao limite a), escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

o que acarreta as condições:

$$|x| > M \text{ e } |y - b| < \delta$$

Finalmente se, ao tender x para a , $|y|$ ou $|f(x)|$ cresce indefinidamente, y tem limite infinito e escreve-se:

$$\lim_{x \rightarrow a} y = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} y = -\infty$$

o que acarreta as condições:

$$|x - a| < \epsilon \quad \text{e} \quad |y| > M$$

OBSERVAÇÃO: As operações com limites de variáveis aplicam-se aos limites de funções.

2.8 — Limites fundamentais.

2.8 — 1) Função algébrica, racional, inteira.

Seja

$$f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m \quad (1)$$

Temos dois casos a considerar:

1.º) A variável x tem limite finito a .

De acôrdo com as operações sobre limites (n.º 2.6) temos, por exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 5) = (\lim_{x \rightarrow 3} x)^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 5 = 9 - 6 + 5 = 8$$

Conclui-se:

O limite da função algébrica, racional, inteira, $f(x)$, quando $x \rightarrow a$ é $f(a)$.

2.º) A variável x tem limite infinito.

Colocando em (1) A_0x^m em evidência, visto como $x \neq 0$, temos:

$$f(x) = A_0x^m \left(1 + \frac{A_1}{A_0x} + \dots + \frac{A_{m-1}}{A_0x^{m-1}} + \frac{A_m}{A_0x^m} \right) \quad (2)$$

Em virtude do n.º 2.6, 3.º, quando $x \rightarrow \pm \infty$ as frações

$$\frac{A_1}{A_0x}, \dots, \frac{A_{m-1}}{A_0x^{m-1}}, \frac{A_m}{A_0x^m}$$

têm limite zero e o parênteses tende para 1.

Logo, temos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} A_0x^m$$

Conclui-se:

O limite de $f(x)$, racional, inteira, quando $x \rightarrow \infty$ é igual ao limite do termo de maior grau.

Exemplos.

$$1.º) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3 + 5x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3) = -3(\lim_{x \rightarrow +\infty} x)^3 = -\infty$$

$$2.º) \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 - 5x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 = 4(\lim_{x \rightarrow -\infty} x)^2 = +\infty$$

$$3.º) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 7x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = 2(\lim_{x \rightarrow -\infty} x)^3 = -\infty$$

2.8 — 2) Função algébrica, racional, fracionária.

$$\text{Seja } \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m}{B_0x^p + B_1x^{p-1} + \dots + B_{p-1}x + B_p} \quad (3)$$

1.º CASO: a variável x tem limite finito a .

De acôrdo com as operações do n.º 2.6, e o parágrafo 2.8-1, teremos:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} F(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \frac{F(a)}{f(a)} \quad [\text{sendo } f(a) \neq 0]$$

Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5x + 7} = \frac{3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 1}{4 - 5 \cdot 2 + 7} = \frac{9}{1} = 9$$

Se fôr $f(a) = 0$, duas hipóteses podem ocorrer:

Primeira hipótese: $F(a) \neq 0$.

Nesta hipótese, virá:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(a)}{0} = \infty$$

Diz-se que o ponto a é um **polo** da função.

Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 5}{x - 3} = \infty \quad (3 \text{ é um polo})$$

Segunda hipótese: $F(a) = 0$.

Nesta hipótese, teremos:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{0}{0}$$

que não tem valor numérico determinado e, portanto, a função fracionária dada não é definida para $x = a$. Porém nesta hipótese, é sempre possível decompor $F(x)$ e $f(x)$ em fatores, sendo um deles $x - a$ (*), o qual se anula para $x = a$. Simplificado êsse fator, acharemos o limite da nova função que é o *limite* da função dada.

Exemplo:

$$\text{Seja } y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

$$\text{Temos: } \lim_{x \rightarrow 3} y = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{0}{0} \quad (\text{não definido}).$$

(*) Para um estudo completo pode o leitor desde logo estudar os parágrafos 9.2, 9.3 e 9.4.

$$\text{No entanto, } y = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = x + 3$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$$

$$\text{Conclui-se: } \lim_{x \rightarrow 3} y = 6$$

Observe-se que não existe valor da função para $x = 3$.

Porém, quando x se *avizinha* de 3, a função recebe valores na *vizinhaça* de 6.

2.º CASO: a variável x tem limite infinito.

Consideremos a igualdade (3) e, de acôrdo com o 2.º caso do parágrafo 2.8-1, e as operações com limites teremos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A_0 x^m}{B_0 x^p}$$

Há três hipóteses a considerar:

Primeira hipótese: $m = p$. Podemos então simplificar o fator comum $x^m = x^p$ e teremos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A_0 x^m}{B_0 x^m} = \frac{A_0}{B_0}$$

Segunda hipótese: $m > p$. Nesta hipótese, podemos pôr $m = p + r$ e, ainda, simplificar a fração:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A_0 x^{p+r}}{B_0 x^p} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A_0 x^r}{B_0} = \infty$$

Terceira hipótese: $m < p$. Podemos pôr $p = m + r$ e virá:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A_0 x^m}{B_0 x^{m+r}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A_0}{B_0 x^r} = \frac{A_0}{\infty} = 0$$

Exemplos:

$$1.º) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{2x^3 - 13x + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{2x^3} = \frac{4}{2} = 2$$

$$2.º) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 7x^3 + 8x - 2}{x^2 - 5x - 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$3.º) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5x + 7}{x^3 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x} = \frac{4}{\infty} = 0$$

2.8 - 3) Limite da razão $\frac{\text{sen } x}{x}$ quando $x \rightarrow 0$, sendo x medido em radianos. (*)

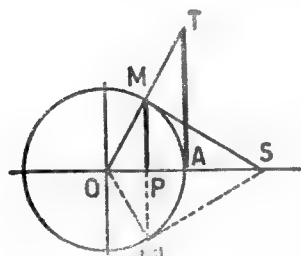


Fig. 12

Seja $0 < \widehat{AM} < \frac{\pi}{2}$ (fig. 12) e x , a medida de $\widehat{AM}$ em radianos.

A congruência dos triângulos retângulos permite concluir:

$$AT = MS = SM' \quad (1)$$

e, pelo teorema da envolvente:

$$MM' < \widehat{MM'} < MS + SM' \quad \text{ou} \quad 2MP < 2\widehat{AM} < 2MS$$

Da figura e da igualdade (1) conclui-se, então:

$$2 \text{ sen } x < 2x < 2 \text{ tg } x$$

Dividindo por $2 \text{ sen } x > 0$:

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}$$

ou, invertendo as razões:

$$1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x$$

Quando o arco tende para zero o co-seno tende para 1; logo, a razão $\frac{\text{sen } x}{x}$ fica compreendida entre 1 e uma quantidade que tende para 1 e podemos concluir:

(*) Na demonstração são considerados os valores absolutos dos segmentos e arcos.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Aplicações.

O limite estudado tem larga aplicação no cálculo do limite de funções transcendentais onde figuram funções circulares.

Exemplos:

1.º) Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x}{x}$

Temos: $\frac{\text{tg } x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$

Logo, vem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times 1 = 1$$

2.º) Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } ax}{bx}$

O arco do seno é ax ; logo, para aparecer a razão entre o seno e o arco, devemos ter no denominador o arco ax . Com este fim, multipliquemos os dois termos da razão pela constante a , teremos:

$$\frac{\text{sen } ax}{bx} = \frac{a \text{ sen } ax}{abx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\text{sen } ax}{ax}$$

Logo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } ax}{bx} = \frac{a}{b} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } ax}{ax} = \frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$$

3.º) Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (Altamiro Tibiriçá, Cálculo, pág. 95)

A função não é definida no ponto 0.

Temos: $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} =$

$$= \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \cos x}$$

Logo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} =$$

$$= 1 \times \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

2.8 - 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$. Número e .

Pela fórmula do binômio de Newton, temos:

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \dots \quad (1)$$

Ao passarmos ao limite observemos que tôdas as frações têm os termos do mesmo grau e, portanto, podemos concluir (2.8-2, 2.º caso):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

Vamos aceitar, sem a demonstração, que êsse limite existe, isto é, que a soma do segundo membro tem um limite. Representêmo-lo pela letra e .Comparando, a partir do segundo, os termos do número e com os da progressão geométrica $:: 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2^2} : \dots$ e observando que são respectivamente menores, concluiremos:

$$e < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots$$

O limite da soma, a partir do segundo termo, será (1.ª Série, P. geométricas):

$$\lim S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

logo, vem:

$$e < 1 + 2 \quad \text{ou} \quad e < 3$$

Com cinco decimais exatos tem-se: $e = 2,71828 \dots$ (irracional.)

2.9 - Limites laterais de uma função.

a) Se uma função, $y = f(x)$, tem um limite b quando x tende para a por valores superiores, diremos que b é um limite à direita de $f(x)$ e escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = b \quad \text{ou} \quad f(a+0) = b$$

sendo h não negativo.

Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{1+h-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} = 0$$

O limite à direita é zero.

b) Se uma função tem limite b quando x tende para a por valores inferiores, diremos que b é um limite à esquerda de $f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b \quad \text{ou} \quad f(a-0) = b$$

Exemplo:

O limite à esquerda de $y = \sqrt{2-x}$ quando x tende para 2 será:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{2-x} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{2-(2-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} = 0$$

Os limites laterais podem ser iguais ou diferentes e pode, ainda, existir apenas um deles.

Exemplos:

1.º) *Limites laterais iguais.* Achar o limite de $y = x^2 + 3x$, quando x tende para 2.

De acordo com as regras de operações com limites, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 3x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h)^2 + \lim_{h \rightarrow 0} 3(2 + h) = 4 + 6 = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 3x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2 - h)^2 + \lim_{h \rightarrow 0} 3(2 - h) = 4 + 6 = 10$$

Assim, temos, com a notação de Dirichlet:

$$f(2 + 0) = f(2 - 0) = f(2) = 10$$

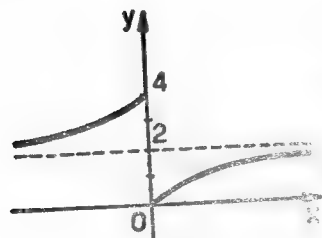


Fig. 13

2.º) *Limites laterais diferentes.* Seja achar o limite quando x tende para zero de

$$y = \frac{4}{1 + 2\frac{1}{x}}$$

a) Limite à direita:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{1 + 2\frac{1}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{1 + 2\frac{1}{0+h}} = \frac{4}{1 + 2\infty} = \frac{4}{\infty} = 0$$

b) Limite à esquerda:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4}{1 + 2\frac{1}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{1 + 2\frac{1}{0-h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{1 - \frac{1}{h}} = \frac{4}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{4}{1 + 0} = 4$$

Assim, os dois limites laterais são diferentes, como esclarece, também, o gráfico no ponto zero (fig. 13).

Resumo: $f(0)$ não definida
 $f(0 + h) = 0$
 $f(0 - h) = 4$

3.º) *Um dos limites laterais não existe.* Seja o exemplo da página 49: $y = \sqrt{x-1}$, e procuremos o limite no ponto 1.

Vimos que o limite à direita é:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0$$

O limite à esquerda não existe, pois, para x negativo, $x-1$ é negativo e não tem raiz quadrada no campo real. O gráfico da função $y = \sqrt{x-1}$ da figura 14 esclarece bem. As hachuras indicam a região onde não existe a função.

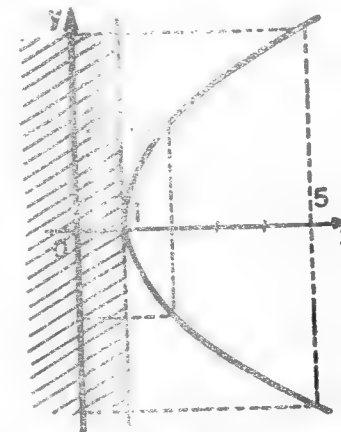


Fig. 14

Observe-se que neste caso tem-se:

$$f(1 + h) = f(1) = 0$$

$$f(1 - h) \text{ não existe.}$$

CONTINUIDADE

2.10 - **Função contínua no ponto a .** Uma função, $f(x)$, é contínua no ponto a quando são preenchidas três condições:

1.º) Exista e seja definida no ponto a .

2.º) Exista $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e seja igual a $f(a)$.

3.º) Exista $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e seja igual a $f(a)$.

Isto é, em resumo:

$$f(a - 0) = f(a) = f(a + 0)$$

Exemplo:

A função $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4}$ é contínua no ponto 1 porque:

1.º É definida no ponto 1:

$$f(1) = \frac{1+2}{1-4} = -1$$

$$\begin{aligned} 2.º \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 + 2}{(1+h)^2 - 4} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h + 3}{h^2 + 2h - 3} = \frac{3}{-3} = -1 \end{aligned}$$

$$3.º \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1-h)^2 + 2}{(1-h)^2 - 4} = -1$$

Isto é: $f(1-0) = f(1) = f(1+0)$

Se apenas a segunda condição fôr preenchida, isto é:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ ou } f(a+0) = f(a)$$

a função diz-se **contínua à direita** do ponto a .

Se fôr preenchida apenas a terceira a função diz-se **contínua à esquerda** do ponto a .

2.11 - Continuidade num intervalo.

Uma função, $y = f(x)$, é contínua no intervalo $[a, b]$ quando fôr contínua à direita de a , à esquerda de b , e, ainda, fôr contínua em todos os outros pontos do intervalo.

OBSERVAÇÃO: Quando uma função é contínua em todo campo de definição diz-se, apenas, função contínua, sem citar o intervalo.

Exemplos.

1.º O trinômio do segundo grau $y = x^2 + px + q$ é uma função contínua de x .

Realmente, sendo a um número real, as três condições são satisfeitas:

$$1.º f(a) = a^2 + pa + q \text{ (real, finito, determinado)}$$

$$2.º f(a+0) = \lim_{h \rightarrow 0} [(a+h)^2 + p(a+h) + q] = \lim_{h \rightarrow 0} (a^2 + pa + q + 2ah + ph + h^2) = f(a)$$

$$3.º f(a-0) = \lim_{h \rightarrow 0} [(a-h)^2 + p(a-h) + q] = f(a)$$

2.º A função da figura 14 é contínua, à direita de 1.

2.12 - Pontos de descontinuidade. Uma função é descontínua para $x=a$, quando pelo menos uma das três condições de continuidade não é preenchida.

O valor $x=a$ chama-se **ponto de descontinuidade**.

Exemplo:

A função da figura 13 é descontínua no ponto zero, porque não é definida para $x=0$ (não preenche a primeira condição).

2.13 - Classificação das descontinuidades. As descontinuidades classificam-se em duas espécies:

Primeira espécie: Quando existem os limites $f(a+0)$ e $f(a-0)$, seja ou não definida para $x = a$.

Há três casos a considerar:

1.º CASO: $f(a+0) = f(a-0)$

Seja estudar a continuidade da função, $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, no ponto 3.

A função não é definida para $x = 3$, pois $y = \frac{0}{0}$.

Por outro lado, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{(3+h) - 3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6+h) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3-h)^2 - 9}{(3-h) - 3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6h + h^2}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6-h) = 6$$

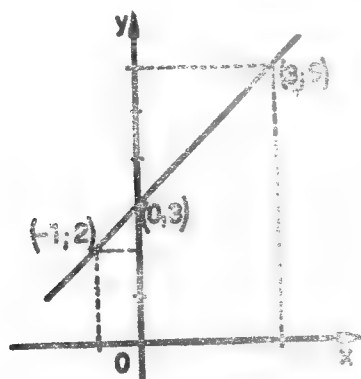


Fig. 15

Pode-se tomar, então, para valor de $f(3)$ o limite comum, 6, e a descontinuidade desaparece; daí, ser este tipo denominado *descontinuidade evitável* (gráfico na fig. 15).

2.º CASO: $f(a+0) \neq f(a-0)$

Exemplo:

Estudar a descontinuidade de $y = \frac{4}{1 + 2\frac{1}{x}}$ no ponto zero.

A função não é definida para $x = 0$.

Temos, pág. 50, gráfico da figura 13:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} y = 4 \quad \text{ou} \quad f(a+0) = 0, \quad f(a-0) = 4$$

Neste caso, o valor absoluto da diferença entre os limites

$$|f(a+0) - f(a-0)| = 4$$

denomina-se **salto** da função no ponto zero.

No nosso exemplo o salto é *finito*.

Pode ocorrer que o salto seja *infinito*, como na função

$$y = \frac{1}{2x}$$

onde temos, no ponto zero (fig. 16):

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} y = 0$$

e, portanto:

$$|f(a+0) - f(a-0)| = \infty$$

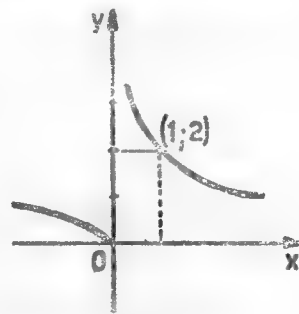


Fig. 16

3.º CASO: *Descontinuidade por passagem ao infinito*, isto é, no ponto a existem e são ambos infinitos $f(a+0)$ e $f(a-0)$.

Neste caso, podem ocorrer as quatro hipóteses da fig. 17.



Fig. 17

Um exemplo do 3.º caso é o das funções algébricas, racionais, fracionárias, nos pontos denominados **polos**, como vimos no n.º 2.8-2 (pág. 43).

Exemplo:

Estudar as descontinuidades da função $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$.

Para que haja descontinuidade deve ser nulo *sòmente* o denominador (página citada). Assim, devemos ter:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{donde} \quad x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_2 = 2$$

Como nenhum dos dois valores anula o numerador, conclui-se que há dois **polos**: $f(1) = \pm \infty$ e $f(2) = \pm \infty$.

Para fixar o tipo, faremos: $f(1+0) = -\infty$ e $f(1-0) = +\infty$ e, portanto, corresponde ao terceiro tipo da figura 17. Análogamente, no polo 2 teremos o segundo tipo.

Segunda espécie: Quando pelo menos um dos limites $f(a \pm 0)$ não é determinado.

EXERCÍCIOS

1. LIMITES

Verificar os limites indicados:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x^2 + 5x + 1) = 8$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 7}{x^2 + 3x + 1} = \frac{3}{5}$
3. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{3x}{x+6}} = 1$
4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} = -3$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan x} = 2$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{2x}} = \sqrt{e}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Calcular os limites:

9. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 4x^2 + 2x + 16)$
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^4 - 5x^2 + 8)$
11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 5x^2 - 8x + 93)$
12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^2 - 5x + 7)$
13. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 + 3}$
14. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 5x - 4}{x^2 - 5}$
15. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}$
16. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$
17. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}$
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2x + 1}{9x^3 - 7x^2 - 5x + 8}$
19. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 2x^2 - 1}{x + 7}$
20. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - 8}{4x^5 - 8x + 7}$
21. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5}{2x - 6}$
22. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3}{x - 1}$ (gráfico no ponto 1)
23. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 16}}$
24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 7x + 1}{\sqrt{x^4 + 16}}$
25. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 7^x$
26. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 7^x$

27. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x}{7^x}$

28. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7^x}{5^x}$

Verificar os resultados indicados:

29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a}} = 2\sqrt{a}$
30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x}{\cos x} = 1$
31. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cot x}{\cos x} = 1$
32. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = 2$
33. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\cos x \cdot \cot \frac{x}{2} \right) = 0$
34. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}$
35. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = -1$
36. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{x} = 0$
37. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{1 - \cos x} = 0$
38. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{\sin^2 x} = 1$

Calcular os limites:

39. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2^x}$
40. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2^x}$
41. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}}$
42. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$
43. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{b}{x}}$
44. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{5^{x-1}}$
45. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{2-x} - \sqrt{2}}$
46. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3+x}}{x - 1}$

2. CONTINUIDADE

47. Mostrar que um polinômio, racional, inteiro,

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_m$$

é uma função contínua de x .

Examine a continuidade das funções seguintes nos pontos indicados. Classifique as discontinuidades quando fôr o caso. Trace o gráfico nos pontos de discontinuidade:

48. $\frac{3-x}{x+2}$ em $x=5$, $x=3$, $x=-2$ 49. $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$ em $x=-2$
50. $\tan x$ em $x=k\pi + \frac{\pi}{2}$ 51. $\cot x$ em $x=k\pi$
52. $y = 10^{\frac{1}{x}}$ em $x=0$ 53. $y = \frac{1}{1+10^x}$ em $x=0$
54. $y = \frac{x+5}{x-3}$ em $x=3$ 55. $y = \frac{x^2-6x+8}{x^2-7x+10}$ em $x=2$

Achar todos os pontos de discontinuidade das funções seguintes e traçar o gráfico em cada um desses pontos.

56. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}$ 57. $\frac{x^2-4}{x^2+6x+11}$
58. $\frac{3x+5}{x^2+4x+4}$ 59. $\frac{x^2+5x+4}{4x^2-8x+3}$
60. a) $y = \sec x$ b) $y = \csc x$

RESPOSTAS:

- | | | | |
|---------------|---------------|---------------|-----------------|
| 9. 13 | 16. $-1/4$ | 23. 0 | 40. 0 |
| 10. $+\infty$ | 17. -3 | 24. 4 | 41. e^2 |
| 11. $-\infty$ | 18. $1/3$ | 25. $+\infty$ | 42. e^2 |
| 12. $-\infty$ | 19. $+\infty$ | 26. 0 | 43. e^{ab} |
| 13. 0 | 20. 0 | 27. 0 | 44. 0 |
| 14. 5 | 21. $+\infty$ | 28. ∞ | 45. $2\sqrt{2}$ |
| 15. ∞ | 22. $-\infty$ | 39. ∞ | 46. $-1/4$ |
-
48. Descontinuidade da 1.ª espécie, passagem ao infinito ($-\infty$ a $+\infty$)
49. Descontinuidade evitável
50. Descontínua, passagem ao infinito ($+\infty$ a $-\infty$)
51. Descontínua: $-\infty$ a $+\infty$
52. Descontínua, salto infinito (0 a $+\infty$)
53. Salto finito igual a um
54. Descontínua: $-\infty$ a $+\infty$
55. Descontínua evitável ($y=2/3$)
56. -1 e 3
57. Não tem
58. -2
59. $1/2$ e $3/2$
60. a) $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ b) $x = k\pi$

3

função linear . linha reta

3.1 - Equação da linha reta.

A linha reta é representada no sistema cartesiano por uma equação do primeiro grau.

Demonstração.

Seja a reta Δ (fig. 18) que corta o eixo $y'y$ no ponto N de ordenada $ON = b$. Tracemos NP_2 paralela a Ox .

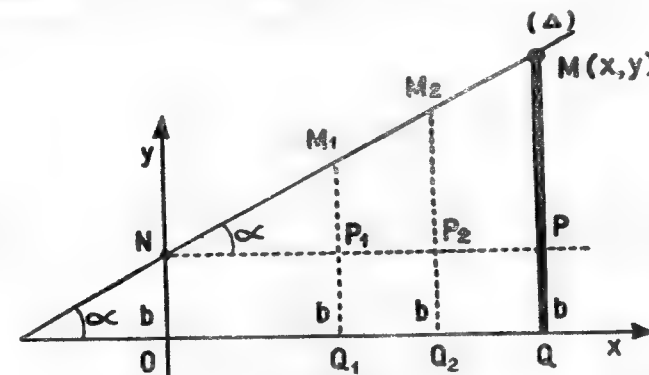


Fig. 18

Consideremos o ponto M , descrevendo da reta, tomando as posições $M_1, M_2, \dots$. Traçadas as ordenadas destes pontos, os triângulos $M_1NP_1, M_2NP_2, \dots$ são semelhantes (ângulo α comum); logo, temos:

$$\frac{M_1P_1}{NP_1} = \frac{M_2P_2}{NP_2} = \dots$$

Representemos por a o valor constante das razões. Teremos, então, para qualquer ponto M da reta:

$$1) \quad \frac{MP}{NP} = a$$

Observando a figura conclui-se:

$$\frac{MP}{NP} = \frac{y-b}{x}$$

e substituindo em (1):

$$\frac{y-b}{x} = a \quad \therefore \quad \boxed{y = ax + b} \quad (2)$$

Assim, todo ponto da reta satisfaz a equação (2) que é, portanto, sua representação *cartesiana* (*).

Recíproca.

Tôda equação do primeiro grau é equação de uma reta.

Seja, de modo geral, a equação:

$$(3) \quad Ax + By + C = 0$$

Primeira hipótese: $B \neq 0$. Neste caso podemos dividir a equação por B e escrevê-las:

$$(4) \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

ou, fazendo $-\frac{A}{B} = a$ e $-\frac{C}{B} = b$

$$y = ax + b$$

(*) *Cartesiana* — Tirada do nome de RENÉ DESCARTES que se assinava Cartesius, e instituiu a *Geometria Analítica*, ramo da Matemática que estuda as propriedades geométricas por intermédio das equações correspondentes das linhas

donde:

$$(5) \quad \frac{y-b}{x} = a$$

Assim, as coordenadas de um ponto qualquer do gráfico da equação (3) satisfazão a condição (5). Sejam, então, M_1 e M_2 (fig. 18) dois pontos quaisquer desse gráfico. Teremos:

$$\frac{M_1Q_1-b}{OQ_1 \text{ ou } NP_1} = a \quad \text{e} \quad \frac{M_2Q_2-b}{NP_2} = a$$

ou, o que é o mesmo:

$$\frac{M_1P_1}{NP_1} = a \quad \text{e} \quad \frac{M_2P_2}{NP_2} = a$$

logo:

$$\frac{M_1P_1}{NP_1} = \frac{M_2P_2}{NP_2}$$

Assim, os triângulos retângulos M_1NP_1 e M_2NP_2 são semelhantes (catetos proporcionais) e os ângulos homólogos são iguais, isto é:

$$\widehat{M_1NP_1} = \widehat{M_2NP_2}$$

portanto, NM_1 coincide com NM_2 e os pontos que satisfazem a equação estão na reta Δ .

Segunda hipótese: $B = 0$. Neste caso a equação reduz-se a:

$$(6) \quad Ax = -C \quad \therefore \quad x = -\frac{C}{A}$$

O gráfico da equação é o lugar dos pontos que têm a mesma abscissa, $-\frac{C}{A}$, e é, portanto, uma reta paralela ao eixo Oy (fig. 19).

Assim, o teorema fica demonstrado em todos os casos.

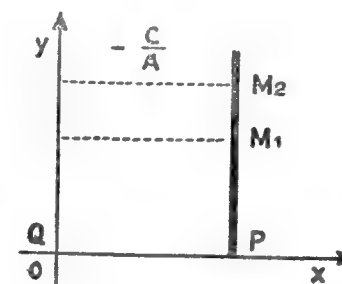


Fig. 19

Exemplo:

Traçar a reta da equação

$$3x + 2y - 6 = 0.$$

Para traçar a reta basta determinar dois de seus pontos, sendo mais simples obter os pontos de intersecção com os eixos (fig. 20):

$$x = 0 \text{ dá } y = 3 \text{ (ponto A)}$$

$$y = 0 \text{ dá } x = 2 \text{ (ponto B)}$$

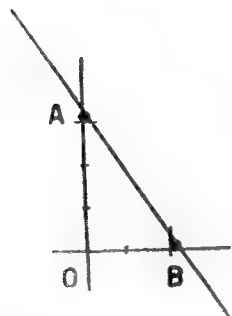


Fig. 20

3.2 - Casos particulares.

1.º CASO: Equação: $y = ax$

Neste caso, N coincide com O (fig. 18) e a equação

(7)

$$y = ax$$

é a de uma *reta que passa na origem*.

2.º CASO: Equação: $y = c$

O gráfico é o lugar dos pontos que têm a mesma ordenada, constante c , e é portanto, uma paralela ao eixo Ox (fig. 21).

Se tivermos, $c = 0$, virá:

$$y = 0$$

que é a equação do eixo dos x (pontos de ordenada nula).

3.º CASO: Equação: $x = c$

O gráfico é uma paralela ao eixo Oy (fig. 19).

Se tivermos $c = 0$, virá:

$$x = 0$$

que é a equação do eixo dos y (pontos de abscissa nula).

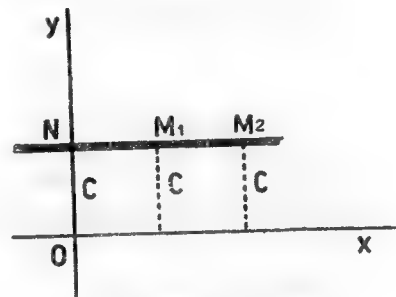


Fig. 21

3.3 - Parâmetro angular. Parâmetro linear. A equação

$$Ax + By + C = 0,$$

denomina-se *equação geral* da linha reta.

A equação

$$y = ax + b$$

denomina-se *equação reduzida* da linha reta e é mais útil que a primeira, por terem seus coeficientes a e b significação geométrica que são:

1.º b — *parâmetro* ou *coeficiente linear* porque representa o segmento ON (fig. 18), isto é, a *ordenada na origem*.

2.º a — *parâmetro* ou *coeficiente angular*.

Temos (igualdade 1):

$$a = \frac{MP}{NP}$$

e, considerando o triângulo MNP (fig. 18):

$$\frac{MP}{NP} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{logo} \quad a = \operatorname{tg} \alpha$$

isto é, o coeficiente a é a *tangente do ângulo* que a *reta* forma com o eixo dos x , também denominado *declividade* da reta.

Exemplos:

1.º A equação

$$y = \sqrt{3}x + 2$$

representa uma reta onde a *ordenada a origem* é 2 (fig. 22) e a *declividade*

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} \quad \therefore \alpha = 60^\circ$$

$$2.º \quad y = x$$

é uma reta que passa na origem e que forma um ângulo

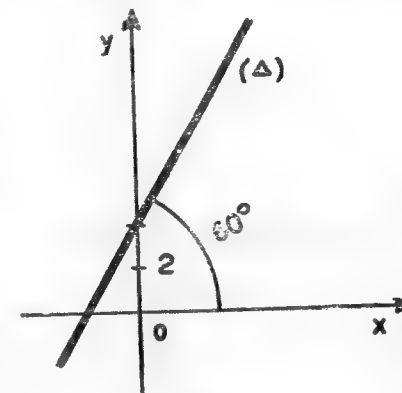


Fig. 22

de 45° com o eixo dos x ($\text{tg } \alpha = 1$), isto é, representa a bissetriz do 1.º e 3.º quadrantes.

3.4 — Diversas formas da equação da reta.

1.ª Equação geral:

$$Ax + By + C = 0$$

2.ª Equação reduzida:

$$y = ax + b$$

3.ª Equação normal da reta.

Seja a reta Δ (fig. 23). Da origem, tracemos a perpendicular $OD = p$.

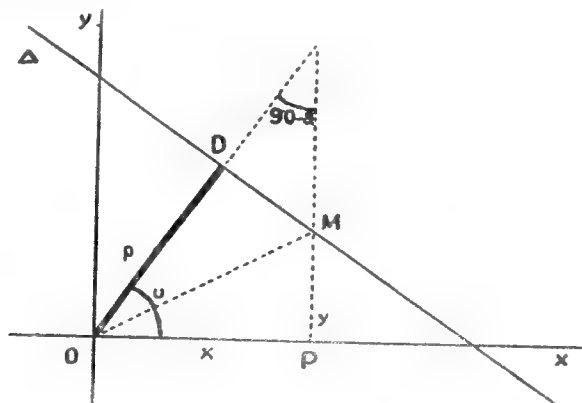


Fig. 23

Seja $M(x, y)$ um ponto qualquer da reta.

Projetemos o contórno OPM sobre OD ; teremos:

$$(8) \quad pr(\overrightarrow{OP}) + pr(\overrightarrow{PM}) = pr(\overrightarrow{OM})$$

e, calculando as projeções:

$$pr(\overrightarrow{OP}) = x \cdot \cos u$$

$$pr(\overrightarrow{PM}) = y \cdot \cos(90 - u) = y \cdot \sin u$$

$$pr(\overrightarrow{OM}) = p$$

Substituindo em (8):

$$x \cdot \cos u + y \cdot \sin u = p$$

Chama-se *equação normal* porque um dos parâmetros é a normal (perpendicular) da origem à reta ($OD = p$).

4.ª Equação da reta, dadas as coordenadas à origem a e b .

Seja $M(x, y)$ um ponto qualquer de AB (fig. 24).

Da semelhança dos triângulos conclui-se:

$$\frac{MP}{OB} = \frac{AP}{OA} \quad \text{ou} \quad \frac{MP}{OB} = \frac{OA - OP}{OA}$$

Fazendo as substituições:

$$\frac{y}{b} = \frac{a - x}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{a}$$

Donde finalmente, a equação procurada:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

que também se denomina *equação segmentária*.

Exemplo:

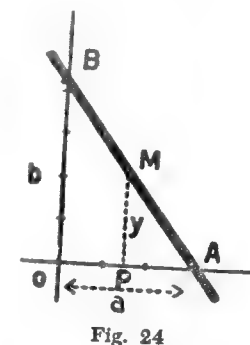
Passar para a forma segmentária a equação

$$4x + 3y = 12$$

Dividindo a equação por 12:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$$

que é a equação procurada (fig. 24).



3.5 — Representação paramétrica da reta. Em lugar de representarmos a reta por uma equação de duas variáveis

$$y = f(x)$$

podemos, também, exprimir as coordenadas do ponto descrevente da reta (M , fig. 25) em função de uma terceira variável denominada **parâmetro**, isto é:

$$x = f(t) \quad \text{e} \quad y = f'(t)$$

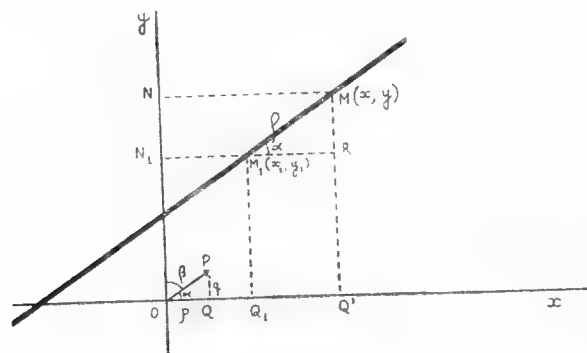


Fig. 25

A este sistema denomina-se **representação paramétrica**.

Seja a reta M_1M (fig. 25) e tomemos como **parâmetro** a distância variável $M_1M = \rho$ de um ponto fixo da reta, $M_1(x_1, y_1)$ a um ponto arbitrário, $M(x, y)$, descrevente da reta. A cada valor de ρ corresponderá um ponto da reta referido a M_1 .

Isto pôsto, tracemos $OP \parallel M_1M$ e tomemos o ponto P tal que:

$$\overline{OP} = +1$$

As coordenadas de P serão:

$$(9) \quad \overline{OQ} = \cos \alpha = p, \quad \overline{PR} = \sin \alpha = \cos \beta = q$$

P denomina-se **ponto diretor**. Os números p e q chamam-se **coeficientes diretores** ou **co-senos diretores** da reta.

Temos, então, para um ponto qualquer $M(x, y)$ da reta:

$$\begin{cases} x = \overline{OQ'} = \overline{OQ_1} + \overline{M_1R} \\ y = \overline{ON} = \overline{ON_1} + \overline{RM} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x = x_1 + \rho \cdot \cos \alpha \\ y = y_1 + \rho \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

Considerando as igualdades (9), concluímos, finalmente a representação paramétrica da reta.

$$x = x_1 + p\rho, \quad y = y_1 + q\rho$$

PROBLEMAS SÔBRE A LINHA RETA

3.6 — Retas que passam por um ponto dado. Seja achar a equação das retas que passam no ponto $A(x_1, y_1)$ (fig. 26).

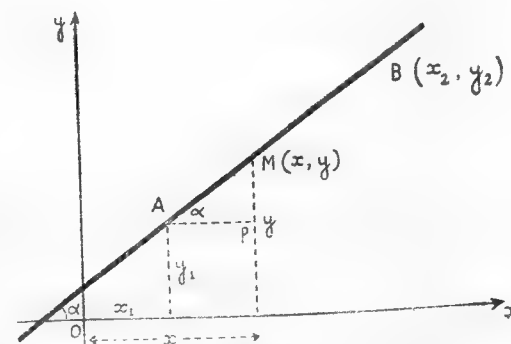


Fig. 26

No triângulo AMP tem-se:

$$\operatorname{tg} \alpha = a = \frac{\overline{PM}}{\overline{AP}}$$

porém $\overline{PM} = y - y_1$ e $\overline{AP} = x - x_1$

logo $a = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

donde a equação:

(10)

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

O coeficiente angular a fica arbitrário. Realmente, pelo ponto A passa uma infinidade de retas, a cada uma delas corresponde um valor de a .

A equação (10) é, pois, a equação do feixe de retas concorrentes no ponto A .

Exemplos:

1.º A equação de todas as retas que passam no ponto $(-1, 5)$ é:

$$y - 5 = a(x + 1)$$

2.º Achar a equação da reta que passa no ponto $(2, -3)$ e cujo coeficiente angular é $3/5$.

Neste exemplo, a segunda condição determina a reta. Assim, a única reta será:

$$y + 3 = \frac{3}{5}(x - 2)$$

ou

$$5y - 3x + 21 = 0$$

3.º Achar a equação da reta que passa no ponto $(3, 7)$ e forma um ângulo de 45° com o eixo Ox .

Temos:

$$a = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

e a única reta será

$$y - 7 = x - 3 \quad \text{ou} \quad y = x + 4$$

3.7 — Reta que passa por dois pontos dados. A equação das retas que passam no ponto A (fig. 26) será, como vimos:

(10) $y - y_1 = a(x - x_1)$

Se esta reta passar, também, em $B(x_2, y_2)$, as coordenadas desse ponto satisfarão a equação (10) e teremos:

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \quad \therefore \quad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Substituindo em (10):

(11)

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

OBSERVAÇÃO: O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ é:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Exemplos:

1.º Achar a equação da reta que passa pelos pontos $(2, 3)$ e $(-5, 7)$.
Temos, pela equação (11):

$$y - 3 = \frac{7 - 3}{-5 - 2}(x - 2) \quad \text{ou} \quad y - 3 = -\frac{4}{7}(x - 2)$$

donde a equação: $7y + 4x - 29 = 0$

2.º Achar a condição para que três pontos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) sejam colineares.

A equação da reta que passa pelos dois primeiros pontos será:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

se o terceiro ponto for colinear com os dois primeiros, suas coordenadas satisfarão esta equação e teremos:

$$y_3 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_3 - x_1) \quad \text{ou} \quad \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$$

Assim: os três pontos (1, 3), (13, 9) e (9, 7) são colineares porque

$$\frac{7-3}{9-3} = \frac{9-1}{13-1} \quad \text{ou} \quad \frac{4}{6} = \frac{8}{12}.$$

3.8 — Intersecção de duas retas. Para achar a intersecção de duas retas dadas por suas equações:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{e} \quad A'x + B'y + C' = 0$$

basta resolver o sistema dessas equações, pois as coordenadas do ponto comum devem satisfazer a ambas as equações.

A solução é: $x = \frac{CB' - BC'}{AB' - BA'} \quad \text{e} \quad y = \frac{AC' - CA'}{AB' - BA'}$

Três casos podem ocorrer:

1.º) $AB' \neq BA'$ ou $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$. O sistema é *determinado*. Existe um ponto comum: **retas concorrentes**.

2.º) $AB' = BA'$ e $CB' \neq BC'$ ou $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$. O sistema é *impossível*. Não há ponto comum: **retas paralelas**.

3.º) $AB' = BA'$ e $CB' = BC'$ ou $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$. O sistema é *indeterminado*. Há uma *infinitude* de pontos comuns: **retas coincidentes**.

Exemplo:

Achar a intersecção das retas

$$3x + 2y - 12 = 0 \quad \text{e} \quad x - 2y + 4 = 0$$

Resolvendo o sistema, obteremos:

$$x = 2, \quad y = 3$$

A intersecção é o ponto (2, 3).

3.9 — Distância de um ponto à uma reta. Seja achar a distância d , do ponto $P(x_1, y_1)$ à reta $y = ax + b$ (fig. 27).

Tracemos a ordenada $MP = y_1$ que intercepta a reta dada no ponto Q , cujas coordenadas x_2 e y_2 serão:

$$x_2 = x_1 \quad \text{e} \quad MQ = y_2 = ax_1 + b$$

pois, estando Q na reta dada suas coordenadas satisfarão a equação $y = ax + b$.

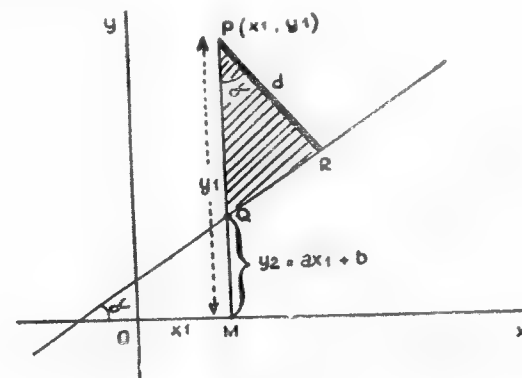


Fig. 27

No triângulo PQR , temos:

$$d = PQ \cdot \cos \alpha$$

e, como: $PQ = |y_1 - y_2| = |y_1 - ax_1 - b|$

conclui-se: $d = |(y_1 - ax_1 - b) \cos \alpha|$

Considerando o coeficiente angular, temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = a \quad \therefore \quad \cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + a^2}}$$

e substituindo no valor de d :

$$(12) \quad d = \left| \frac{y_1 - ax_1 - b}{\sqrt{1 + a^2}} \right|$$

OBSERVAÇÃO: Para a equação geral $Ax + By + C = 0$, o cálculo da distância pode ser feito imediatamente pela fórmula:

$$(12-a) \quad d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

que se obtém fazendo, na fórmula (12), as substituições

$$a = -\frac{A}{B} \quad \text{e} \quad b = -\frac{C}{B}$$

Exemplos:

1.º Calcular a distância do ponto (1, 3) à reta $3x + 4y + 5 = 0$.

Resolução. A fórmula (12-a) dá:

$$d = \left| \frac{3 + 12 + 5}{\sqrt{9 + 16}} \right| = \frac{20}{5} = 4$$

2.º Calcular a distância do ponto (2, 21) à reta $y = 3x + 5$.

Temos (fórmula 12):

$$d = \left| \frac{21 - 6 - 5}{\sqrt{1 + 9}} \right| = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

3.10 - Ângulo de duas retas. Seja calcular o ângulo das duas retas Δ e Δ' (fig. 28), dadas por suas equações $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$.

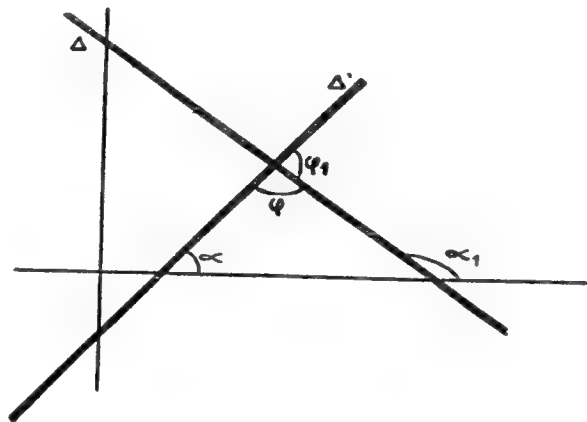


Fig. 28

Na figura 28 tem-se, pelo teorema do ângulo externo:

$$\varphi = \alpha_1 - \alpha$$

$$\text{logo:} \quad \text{tg } \varphi = \text{tg } (\alpha_1 - \alpha)$$

$$\text{ou} \quad \text{tg } \varphi = \frac{\text{tg } \alpha_1 - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \alpha_1}$$

Como $\text{tg } \alpha = a'$ e $\text{tg } \alpha_1 = a$, conclui-se a fórmula:

(13)

$$\text{tg } \varphi = \frac{a - a'}{1 + aa'}$$

Para o ângulo obtuso φ_1 , teremos:

$$\varphi_1 = \pi - \varphi \quad \therefore \quad \text{tg } \varphi_1 = -\text{tg } \varphi$$

$$\text{logo:} \quad \text{tg } \varphi_1 = \frac{a' - a}{1 + aa'}$$

Exemplos:

1.º Achar o ângulo das retas $2x - y + 5 = 0$ e $3x + y - 7 = 0$.
Os coeficientes angulares são:

$$a = -\frac{A}{B} = 2 \quad \text{e} \quad a' = -\frac{A'}{B'} = -3$$

$$\text{Temos, então:} \quad \text{tg } \varphi = \frac{2 + 3}{1 - 6} = -1$$

$$\therefore \quad \varphi = 135^\circ \quad \text{e} \quad \varphi_1 = 45^\circ$$

2.º Achar a equação da reta que passa pelo ponto (2, 4) e forma um ângulo de 45° com $x - 2y + 2 = 0$.

Resolução. O coeficiente angular da reta dada é

$$-\frac{A}{B} = \frac{1}{2}$$

etanto pode ser o valor de a como o de a' na fórmula (13). Dêsse modo, o problema admite duas soluções (fig. 29).

Primeira solução: $a = \frac{1}{2}$

Teremos: $\frac{\frac{1}{2} - a'}{1 + \frac{1}{2}a'} = 1$, visto ser $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$

$$\therefore 1 - 2a' = 2 + a' \quad \text{e} \quad a' = -\frac{1}{3}$$

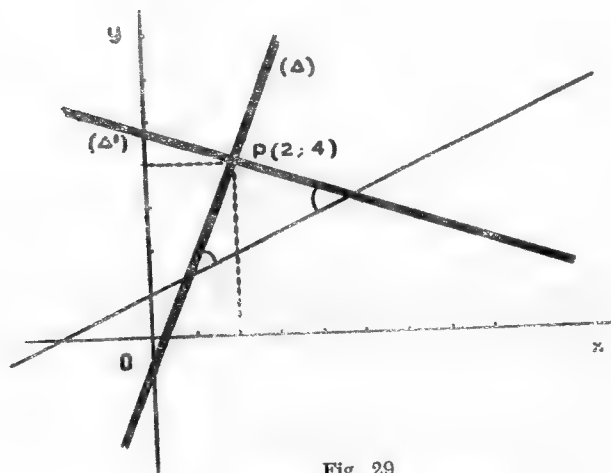


Fig. 29

A equação da reta procurada será (fórmula 10):

$$y - 4 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

ou

$$x + 3y - 14 = 0$$

Segunda solução: $a' = \frac{1}{2}$

Neste caso virá:

$$\frac{a - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}a} = 1 \quad \text{ou} \quad 2a - 1 = 2 + a$$

$$\therefore a = 3$$

A reta procurada será:

$$y - 4 = 3(x - 2) \quad \text{ou} \quad 3x - y - 2 = 0$$

3.º) Achar o ângulo formado pelas retas $y = \sqrt{3} \cdot x + 2$ e $x = 3$.

Resolução. O coeficiente angular da segunda reta não existe, pois a mesma é paralela a Oy (fig. 30) e o da primeira é $\sqrt{3}$. Assim temos

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} \therefore \alpha = 60^\circ$$

O ângulo pedido é, portanto, como se observa na figura 30:

$$90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

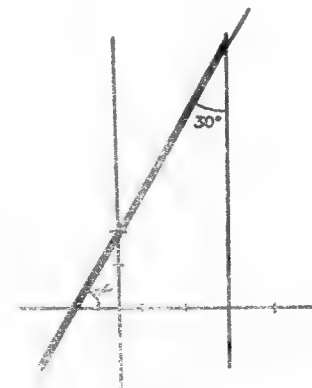


Fig. 30

3.11 – Condição de paralelismo. Quando duas retas são paralelas, formam ângulos iguais com o eixo Ox e reciprocamente. Conclui-se:

Duas retas paralelas têm coeficientes angulares iguais e reciprocamente.

A equação (13) conduz à mesma conclusão, pois, se as retas forem paralelas, teremos:

$$\varphi = 0$$

donde:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a - a'}{1 + aa'} = 0$$

que acarreta:

$$a - a' = 0 \therefore$$

$$a = a'$$

Exemplo:

Achar a equação da paralela à reta $3x - 2y + 1 = 0$, traçada do ponto $(-2, 5)$.

Resolução. A equação das retas que passam no ponto dado é:

$$y - 5 = a(x + 2)$$

Como as paralelas têm coeficientes angulares iguais:

$$a = -\frac{A}{B} = \frac{3}{2}$$

a equação pedida será:

$$y - 5 = \frac{3}{2}(x + 2) \quad \text{ou} \quad 3x - 2y + 16 = 0$$

3.12 - Condição de perpendicularismo. Sejam as retas perpendiculares Δ e Δ' (fig. 31). Tracemos pela intersecção a paralela ao eixo dos x . Teremos:

$$\alpha = 90^\circ + \alpha_1$$

donde: $\operatorname{tg} \alpha = -\cot \alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1}$

e finalmente, por ser $\operatorname{tg} \alpha = a$ e $\operatorname{tg} \alpha_1 = a'$:

$$a = -\frac{1}{a'}$$

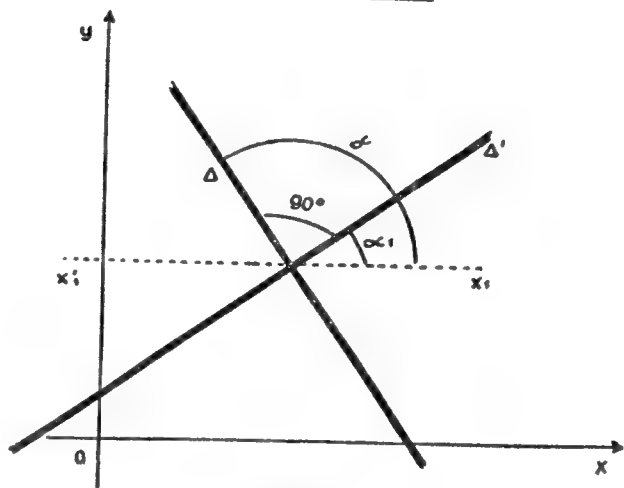


Fig. 31

Conclui-se:

Duas retas perpendiculares têm coeficientes angulares recíprocos e de sinais contrários e reciprocamente.

OBSERVAÇÕES:

1.ª) A aplicação da fórmula 13 conduziria a obter $\operatorname{tg} 90^\circ$ que não é definida. Em certo ponto de vista, podemos considerar a fórmula 13 correta para o caso $\varphi = 90^\circ$, das retas perpendiculares, pois, de acordo com a condição estudada virá

$$aa' = -1 \quad \therefore \quad 1 + aa' = 0$$

O denominador da fórmula (13) é nulo e $\operatorname{tg} \varphi$ não é definida. Ora, entre 0° e 180° , o único ângulo cuja tangente não é definida é o ângulo de 90° .

2.ª) Na demonstração da condição de perpendicularismo supuzemos que os dois coeficientes angulares existissem, isto é, que nenhuma das retas fôsse paralela a Oy . Este caso ocorrendo, é claro que a perpendicular procurada será uma paralela a Ox , isto é, a perpendicular à reta $x = k$ tem equação $y = k_1$.

Exemplos:

1.º) Achar a equação da perpendicular a $3x + 6y + 5 = 0$, traçada do ponto $(2, 3)$.

Resolução. A equação do feixe de retas que passam no ponto dado é

$$y - 3 = a(x - 2)$$

para que seja perpendicular à reta dada devemos ter:

$$a = -\frac{1}{a'}$$

e como $a' = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{2}$

temos: $a = 2$

e a equação pedida é:

$$y - 3 = 2(x - 2) \quad \text{ou} \quad 2x - y - 1 = 0$$

2.º) Achar a equação da perpendicular a reta $x = 3$ traçada do ponto $(0, 5)$.

A perpendicular procurada é (fig. 32):

$$y = 5$$

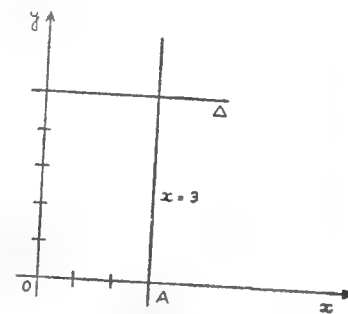


Fig. 32

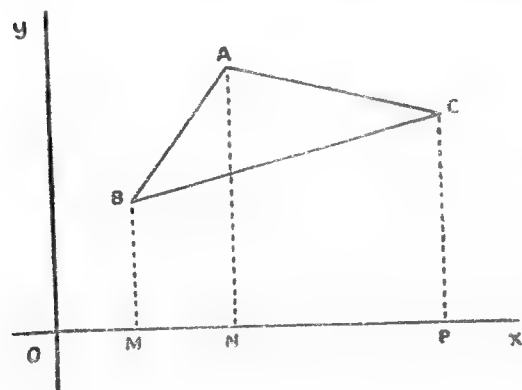


Fig. 33

3.13 - Área de um triângulo em função das coordenadas dos vértices. Seja o triângulo de vértices (fig. 33):

$$A(x_1, y_1),$$

$$B(x_2, y_2),$$

$$C(x_3, y_3)$$

Temos:

$$(1) \quad S_{ABC} = S_{ABMN} + S_{ANPC} - S_{BCPM}$$

E, ainda (área do trapézio):

$$S_{ABMN} = \frac{1}{2} (AN + BM) MN = \frac{1}{2} (y_1 + y_2) (x_1 - x_2)$$

Analogamente:

$$S_{ANPC} = \frac{1}{2} (y_1 + y_3) (x_3 - x_1)$$

$$S_{BMPC} = \frac{1}{2} (y_2 + y_3) (x_3 - x_2)$$

Substituindo em (1):

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} [(y_1 + y_2) (x_1 - x_2) + \\ &\quad + (y_1 + y_3) (x_3 - x_1) - (y_2 + y_3) (x_3 - x_2)] \\ &= \frac{1}{2} [x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_2 y_2 + x_3 y_1 + \\ &\quad + x_3 y_3 - x_1 y_3 - x_1 y_2 - x_3 y_2 - x_3 y_3 + x_2 y_2 + x_2 y_3] \end{aligned}$$

donde, finalmente:

$$S = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

a qual, calcula-se mais simplesmente com a forma de determinante:

(14)

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

A área é o valor absoluto do determinante.

Exemplo:

Calcular a área do triângulo cujos vértices são:

$$A(5, 2), B(0, 3), C(-2, -1)$$

Temos, pela fórmula (14):

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (15 + 7) = 11$$

3.14 - Resumo.

EQUAÇÕES DA RETA	FÓRMULAS	
Geral: $Ax + By + C = 0$	Retas que passam por um ponto: $y - y_1 = a(x - x_1)$	Distância: $d = \left \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right $
Reduzida: $y = ax + b$	Reta determinada por dois pontos: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$	Ângulo: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a - a'}{1 + aa'}$
Normal: $x \cdot \cos u + y \cdot \sin u = p$	Pontos colineares: $\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$	Paralelismo: $a = a'$
Segmentária: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	Área do triângulo: $S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$	Perpendicularismo: $a = -\frac{1}{a'}$
Paramétrica: $x = x_1 + p \cdot \rho$ $y = y_1 + q \cdot \rho$		

EXERCÍCIOS

Achar a equação da reta sendo dados:

1. $b = 7, \alpha = 135^\circ$ *Resp.: $x + y - 7 = 0$*
2. $b = -3, \alpha = 0$ *Resp.: $y + 3 = 0$*
3. $p = 3, u = 45^\circ$ *Resp.: $x + y = 3\sqrt{2}$*
4. $p = 4, u = 240^\circ$ *Resp.: $x + \sqrt{3}y + 8 = 0$*
5. $a = 5, b = 10$ *Resp.: $2x + y - 10 = 0$*
6. $a = 2, b = 3$ *Resp.: $3x + 2y - 6 = 0$*

Achar a equação geral das retas dadas pelas equações:

7. $y = \frac{2}{3}x - 5$ *Resp.: $2x - 3y - 15 = 0$*
8. $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ *Resp.: $5x + 4y - 20 = 0$*
9. $x \cdot \cos 120^\circ + y \cdot \sin 120^\circ = 3$ *Resp.: $x - \sqrt{3}y + 6 = 0$*
10. $y = \frac{2}{5}x - \frac{2}{3}$ *Resp.: $6x - 15y - 10 = 0$*
11. $x \cdot \cos 45^\circ + y \cdot \sin 45^\circ = 5$ *Resp.: $x + y - 5\sqrt{2} = 0$*
12. $\begin{cases} x = 3 + 5\rho \\ y = -2 + 3\rho \end{cases}$ *Resp.: $3x - 5y - 19 = 0$*
13. Achar a equação da reta que passa pelo ponto (3, 4) e forma um ângulo de 135° com o eixo Ox . *Resp.: $x + y - 7 = 0$*

Achar a equação da reta que passa pelos pontos:

14. (2, 3) e (0, 0) *Resp.: $3x - 2y = 0$*
15. (-1, -4) e (3, -5) *Resp.: $x + 4y + 17 = 0$*

Verificar se os pontos seguintes são colineares:

16. (-17, 0), (3, -5) e (-9, -2) *Resp.: Sim*
17. (2, 3), (0, 0) e (4, 5) *Resp.: Não*
18. Achar a equação da reta que passa no ponto (-1, -2) e na intersecção das retas $x - 5y + 2 = 0$ e $2x - y - 5 = 0$ *Resp.: $3x - 4y - 5 = 0$*

Achar a distância do ponto à reta seguintes:

19. (0, -4) e $6x - 8y + 7 = 0$ *Resp.: 3,9*
20. (2, 6) e $y = 2x - 8$ *Resp.: $2\sqrt{5}$*

21. Achar a distância da origem à reta $5x - 12y + 26 = 0$ *Resp.: 2*
22. Achar a distância do ponto de intersecção das retas $7x - 2y - 31 = 0$ e $8x + 3y - 46 = 0$, à reta $3x + 4y - 5 = 0$ *Resp.: 3,6*

Achar o ângulo das retas:

23. $4x - 2y + 7 = 0$ e $3x + y - 8 = 0$ *Resp.: 135° ou 45°*
24. $3x + 4y + 2 = 0$ e $4x - 3y - 9 = 0$ *Resp.: 90°*
25. $2x - 3y + 5 = 0$ e $4x - 6y - 11 = 0$ *Resp.: 0°*
26. $x = 2$ e $3x - 5y + 13 = 0$ *Resp.: $30^\circ 58'$*
27. $y = 3$ e $2x - y + 3 = 0$ *Resp.: $63^\circ 26'$*

Achar a equação da reta que passa pelo ponto (3, 1) e é paralela às retas:

28. $y = 5x + 7$ *Resp.: $5x - y - 14 = 0$*
29. $2x + 3y - 13 = 0$ *Resp.: $2x + 3y - 9 = 0$*
30. $x \cdot \cos 300^\circ + y \cdot \sin 300^\circ = 7$ *Resp.: $x - \sqrt{3}y - (3 - \sqrt{3}) = 0$*
31. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ *Resp.: $3x + 2y - 11 = 0$*
32. $x = 7$ *Resp.: $x = 3$*
33. $y - 5 = 0$ *Resp.: $y = 1$*
34. Achar a equação da reta que passa no ponto (3, 8) e é paralela ao eixo dos x . *Resp.: $y = 8$*
35. Achar a equação da reta que passa no ponto (3, 8) e é paralela ao eixo dos y . *Resp.: $x = 3$*
36. Achar a equação da reta que passa na origem e é perpendicular a $2x - 5y + 13 = 0$. *Resp.: $5x + 2y = 0$*
37. Achar a equação da reta que passa na intersecção das retas $x - 3y + 1 = 0$ e $2x - 4y - 2 = 0$ e é perpendicular a $2x = 3y$. *Resp.: $3x + 2y - 19 = 0$*
38. Achar a equação da perpendicular à reta $3x - 2y + 16 = 0$ levantada do ponto de abscissa 2. *Resp.: $2x + 3y - 37 = 0$*
39. Achar a equação da reta que passa na origem e forma um ângulo de 45° com a reta $5x - 4y + 3 = 0$. *Resp.: $9x + y = 0$ ou $x - 9y = 0$*
40. Achar a equação da reta que passa no ponto (-2, 1) e forma um ângulo de 60° com a reta $\sqrt{3}x - 3y - 15 = 0$. *Resp.: $x + 2 = 0$ ou $\sqrt{3}x + 3y - (3 - 2\sqrt{3}) = 0$*
41. Achar a equação da reta que passa pela intersecção das retas $5x + 2y - 7 = 0$ e $3x - y - 2 = 0$ e é paralela à reta $x - 4y + 7 = 0$. *Resp.: $x - 4y + 3 = 0$*
42. Achar a equação da reta que passa no ponto da abscissa 2 da reta $y = 3x - 1$ e é perpendicular a $x + 3y - 13 = 0$. *Resp.: $3x - y - 1 = 0$*

43. Achar a equação da reta que passa no ponto (0, 7) e é perpendicular à reta que une os pontos (2, 3) e (-5, 4). *Resp.: $y - 7x - 7 = 0$*
44. O triângulo cujos vértices são os pontos (4, 3), (3, 4) e (5, 6) é retângulo. Verificar.
45. Mostrar que o triângulo, cujos vértices são os pontos (0, 0), (2, 0) e (1, 4) é isósceles.
46. Achar as equações dos lados do triângulo $A(2, -1)$, $B(3, 2)$, $C(4, 0)$.
Resp.: $3x - y - 7 = 0$, $x - 2y - 4 = 0$ e $2x + y - 8 = 0$.
47. As equações dos lados a , b , c , de um triângulo são $3x - 2y + 17 = 0$, $x + 4y - 27 = 0$ e $6x - 5y = 0$, respectivamente. Achar a equação e o comprimento da altura baixada sobre o terceiro lado.

$$\text{Resp.: } 5x + 6y - 37 = 0 \quad d = \frac{41}{61} \sqrt{61}$$

48. Achar a área do triângulo cujos vértices são: (0, 0), (-5, -7) e (2, -4).
Resp.: 17

Achar a área do triângulo cujos lados são:

49. $x = y$, $2x + y - 6 = 0$ e $x = 0$ *Resp.: 6*
50. $y = x + 2$, $x + y = 6$ e $x + 3y - 6 = 0$ *Resp.: 8*
51. Calcular m de modo que as retas $mx - 3y + 7 = 0$ e $2x + 6y - 13 = 0$ sejam paralelas.
Resp.: $m = -1$
52. Calcular m de modo que a reta $2x + my - 15 = 0$ passe no ponto (2, 1).
Resp.: $m = 11$
53. Calcular m e p de modo que as retas $6x + my - 3 = 0$ e $px + 8y - 6 = 0$ sejam coincidentes.
Resp.: $m = 4$ e $p = 12$
54. Achar a de modo que os pontos (a, 3), (0, 1) e (3, 5) sejam colineares.
Resp.: $a = 1,5$
55. Achar m de modo que as três retas $3x - 2y - 7 = 0$, $x + 2y - 5 = 0$ e $mx + 3y - 9 = 0$ passem no mesmo ponto. *Resp.: $m = 2$*
56. Achar m de modo que as retas $y = mx + 7$ passe na intersecção das retas $x + y - 1 = 0$ e $2x - y - 8 = 0$. *Resp.: $m = -3$*

4

equação do 2.º grau . circunferência

4.1 - Distância entre dois pontos. Fórmula. Sejam dados os dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ (fig. 34).

No triângulo retângulo P_1P_2M , tem-se:

$$(1) \quad \begin{cases} P_1M = Q_1Q_2 = x_2 - x_1 \\ P_2M = P_2Q_2 - MQ_2 = y_2 - y_1 \end{cases}$$

e, pelo teorema de Pitágoras:

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1M}^2 + \overline{P_2M}^2$$

Com as substituições dadas por (1), resulta:

$$\overline{P_1P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

A raiz quadrada dá a **fórmula da distância** entre dois pontos:

$$(2) \quad P_1P_2 \quad \text{ou} \quad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

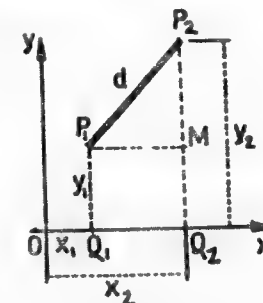


Fig. 34

Exemplos:

1.º A distância entre os pontos $A(2, 5)$ e $B(5, 1)$ será:

$$AB = d = \sqrt{(5-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

2.º A distância entre os pontos $M(-5, 2)$ e $N(7, -3)$ será:

$$MN = \sqrt{(7+5)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{169} = 13$$

4.2 - Equação da circunferência de círculo em coordenadas cartesianas ortogonais. Seja a circunferência (CR) de centro C e raio R , sendo α e β as coordenadas do centro (fig. 35).

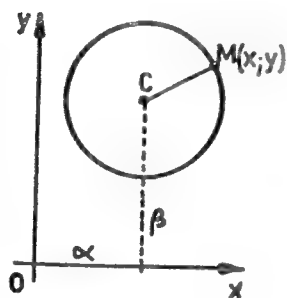


Fig. 35

Para um ponto qualquer $M(x, y)$ da curva, teremos, por definição de circunferência:

$$MC = R$$

Substituindo MC por seu valor, de acordo com a fórmula de distância, vem:

$$\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = R$$

Donde a equação da circunferência:

(3)

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

que também pode ser escrita, efetuadas as operações:

$$(4) \quad x^2 - 2\alpha x + y^2 - 2\beta y + (\alpha^2 + \beta^2 - R^2) = 0$$

onde se observa que os coeficientes dos termos do 1.º grau são simétricos dos dobros das coordenadas do centro e o termo constante tem para expressão $\alpha^2 + \beta^2 - R^2$.

Exemplos:

1.º Achar a equação da circunferência de centro $C(3, 4)$ e raio 7.

Resolução. Teremos (fórmula 3):

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 49$$

ou, efetuando as operações:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y - 24 = 0$$

2.º Dada a equação de uma circunferência

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y - 2 = 0$$

achar as coordenadas do centro e o raio.

Resolução. Podemos proceder de duas maneiras:

1.º Completamos os quadrados, a fim de obter a equação com a forma (3):

$$x^2 - 6x + \dots + y^2 - 10y + \dots - 2 = 0$$

$$\text{ou} \quad x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 - 9 - 25 - 2 = 0$$

$$\text{isto é:} \quad (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 36$$

Conclui-se: as coordenadas do centro são 3 e 5 e o raio $\sqrt{36} = 6$.

2.º Utilizamos a forma (4), o que dá:

$$2\alpha = 6 \quad \alpha = 3$$

$$2\beta = 10 \quad \beta = 5$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - R^2 = -2 \quad R^2 = 36$$

O centro é $C(3, 5)$ e o raio $R = \sqrt{36} = 6$.

4.3 - Equação geral do segundo grau a duas variáveis e a circunferência de círculo. Consideremos a equação geral do segundo grau:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Para que represente uma circunferência de círculo, será equivalente à equação (4). Logo, devemos ter:

$$(a) \quad B = 0$$

e, para os demais coeficientes:

$$\frac{A}{1} = \frac{C}{1} = \frac{D}{-2\alpha} = \frac{E}{-2\beta} = \frac{F}{\alpha^2 + \beta^2 - R^2} = k$$

Das quais decorrem:

$$(b) \quad A = C \quad \alpha = -\frac{D}{2A}, \quad \beta = -\frac{E}{2A}, \quad \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = \frac{F}{A}$$

Substituindo os valores de α e β na última equação vem, resolvendo em relação a R :

$$R^2 = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A} = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$$

donde:
$$R = \left| \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2A} \right|$$

e para que R exista, devemos ter:

(c)
$$D^2 + E^2 - 4AF \geq 0$$

Temos, assim as condições para que a equação geral do segundo grau represente uma circunferência de círculo:

$$B = 0, \quad A = C, \quad D^2 + E^2 - 4AF \geq 0$$

CASOS PARTICULARES.

1.º) $D^2 + E^2 - 4AF = 0$. Teremos $R = 0$ e a circunferência reduz-se a um ponto.

2.º) $D = 0$ ou $\alpha = 0$. A circunferência tem o centro no eixo dos y e a equação reduzida será:

$$x^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

3.º) $E = 0$ ou $\beta = 0$. Centro no eixo dos x :

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2$$

4.º) $D = E = 0$ ou $\alpha = \beta = 0$. Centro na origem:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

que é a mais simples.

Exemplos:

1.º) Verificar a natureza da curva representada pela equação $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$.

Temos: $B = 0, \quad A = C = 1, \quad D^2 + E^2 - 4AF = 36 > 0$.

Logo, a curva é uma circunferência de círculo.

Comparando com a forma (4), temos:

$$2\alpha = 4, \quad 2\beta = 2 \quad \text{e} \quad \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = -4$$

As coordenadas do centro são: $\alpha = 4/2 = 2$ e $\beta = 2/2 = 1$.

$$2^2 + 1^2 - R^2 = -4 \quad \therefore \quad R^2 = 9 \quad \text{e} \quad R = 3$$

2.º) Verificar a natureza da curva da equação

$$2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y + 6 = 0$$

Temos: $B = 0, \quad A = C = 2$ e $D^2 + E^2 - 4AF = 9 + 25 - 48 < 0$.

Logo, a equação não tem representação gráfica, pois não é satisfeita a terceira condição (c).

3.º) Verificar a natureza da curva da equação

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$$

Temos: $B = 0, \quad A = C = 1, \quad D^2 + E^2 - 4AF = 4 + 16 - 20 = 0$.

A equação representa o ponto, cujas coordenadas são:

$$2\alpha = 2 \quad \alpha = 1$$

$$2\beta = 4 \quad \beta = 2$$

isto é, o ponto $C(1, 2)$.

OBSERVAÇÃO. Uma equação do 2.º grau pode representar mais de uma linha. Assim, a equação $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ que se pode escrever $(x - y)(x + 3y) = 0$, representa as duas retas: $x = y$ e $x = -3y$.

4.4 - Intersecções de retas e circunferências. Sejam a reta

$$Ax + By + C = 0$$

e a circunferência $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Para que um ponto pertença ao gráfico de uma dessas equações, suas coordenadas devem satisfazer dita equação (n.º 1.14).

Logo, os pontos de intersecção (pontos comuns) satisfarão a ambas, isto é, suas coordenadas serão as soluções do sistema das duas equações.

Três hipóteses podem ocorrer:

1.ª) As duas soluções do sistema são distintas: a reta é secante.

2.ª) As duas soluções são iguais: a reta é tangente.

3.ª) O sistema não tem solução no campo real: não há ponto comum — a reta é exterior.

Exemplos:

1.º Achar os pontos de intersecção da reta $x + 3y - 15 = 0$ com a circunferência $x^2 + y^2 = 25$.

Resolvendo o sistema, temos:

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= -3y + 15 \\ (-3y + 15)^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}$$

donde a equação do segundo grau:

$$y^2 - 9y + 20 = 0$$

cujas raízes são $y_1 = 5$, $y_2 = 4$ (reta secante).

Substituindo em (1), temos os dois pontos de intersecção:

$$A \begin{cases} x = -15 + 15 = 0 \\ y = 5 \end{cases} \quad B \begin{cases} x = -12 + 15 = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

2.º Achar os pontos de intersecção de $3x + y = 19$ com

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

Resolução. Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} y = 19 - 3x \\ x^2 + 361 - 114x + 9x^2 - 4x - 114 + 18x + 3 = 0 \end{cases}$$

Donde a equação:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

cujas raízes são: $x_1 = x_2 = 5$ e portanto $y = 19 - 15 = 4$.

O único ponto comum é (5, 4) e a reta é tangente.

3.º Achar os pontos de intersecção de $y = x + 6$ com

$$x^2 + y^2 = 16$$

Resolução. O sistema dá: $y = x + 6$

$$x^2 + (x + 6)^2 = 16 \quad \text{ou} \quad x^2 + 6x + 10 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-10}}{2}$$

A equação não tem raízes reais e a reta é exterior.

EXERCÍCIOS

Achar a distância entre os pontos:

1. $A(3, -4)$ e $B(-3, 4)$ Resp.: 10
2. $A(2, 3)$ e $B(5, 7)$ Resp.: 5
3. $M(0, -3)$ e $P(-4, 0)$ Resp.: 5
4. $(0, 0)$ e $A(3, 3)$ Resp.: 4,23 (apr.)
5. Achar os comprimentos dos lados de um triângulo, cujos vértices são: $A(3, 2)$, $B(0, -2)$ e $C(-1, 2)$ Resp.: 5, 4 e $\sqrt{17}$
6. O mesmo para o triângulo: $M(0, 0)$, $N(0, 4)$ e $P(4, 0)$ Resp.: $MN = 4$, $MP = 4$ e $NP = 5,64$
7. Um segmento AB tem comprimento 10 e a extremidade A é o ponto (2, 3). A abscissa de B é 8. Achar a ordenada de B . Resp.: 11 ou -5
8. Achar as coordenadas do ponto situado a igual distância dos pontos: $A(4, 0)$, $B(6, 4)$, $C(0, 4)$. Resp.: (3, 3)
9. Calcular o perímetro do triângulo cujos vértices são: (6, -8), (-6, -8) e (0, 0). Resp.: 32
10. Calcular o perímetro do triângulo: $A(6, 0)$, $B(2, -3)$, $C(3, 4)$. Resp.: 17,05 (apr.)

Escrever as equações das circunferências de círculo com os seguintes dados:

11. Centro $C(5, -2)$ e raio 7 Resp.: $x^2 + y^2 - 10x + 4y - 20 = 0$
12. Centro $C(-3, 0)$ e raio 12 Resp.: $x^2 + y^2 + 6x - 135 = 0$
13. Centro $C(0, -5)$ e raio 3 Resp.: $x^2 + y^2 + 10y + 16 = 0$
14. Centro (0, 0) e raio 4 Resp.: $x^2 + y^2 = 16$
15. Centro $C(-5, -4)$ e diâmetro 8 Resp.: $x^2 + y^2 + 10x + 8y + 25 = 0$
16. Achar a equação da circunferência tangente ao eixo $y'y$ e cujo centro é o ponto (5, 0). Resp.: $x^2 + y^2 - 10x = 0$

Achar o centro e o raio das circunferências que têm para equações:

17. $x^2 + y^2 = 16$ Resp.: (0, 0), 4
18. $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ Resp.: (2, 0), 3
19. $x^2 + y^2 + 8y - 9 = 0$ Resp.: (0, -4), 5
20. $x^2 + y^2 + 6y = 0$ Resp.: (0, -3), 3
21. $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 24 = 0$ Resp.: (-1, 5), $R = \sqrt{2}$
22. $2x^2 + 2y^2 - 6x - 14y + 11 = 0$ Resp.: (1, 5/2), (3, 5/2), $R = 3$
23. Verificar se a equação $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 34 = 0$ representa uma circunferência de círculo. Resp.: Sim, de raio nulo

Achar os pontos de intersecção das retas e circunferências seguintes :

24. $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ e $y = 2x$ Resp.: (0, 0) e (4, 8)
25. $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ e $2x - y + 3 = 0$
Resp.: (0, 3) e (-2, -1)
26. A equação de uma corda do círculo $x^2 + y^2 = 49$ é $x + y - 7 = 0$.
Achar o comprimento da corda. Resp.: 9,87 (aprox.)
27. Achar a equação do diâmetro da circunferência $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 15 = 0$,
paralelo à reta $3x - 2y + 1 = 0$ Resp.: $3x - 2y - 14 = 0$
28. Achar a equação do diâmetro da circunferência $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 44 = 0$,
perpendicular à reta $x - 3y - 7 = 0$ Resp.: $3x + y - 6 = 0$
29. Dada a circunferência $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 24 = 0$, achar a equação
do diâmetro que passa pela origem. Resp.: $5x + y = 0$
30. Achar a distância do centro da circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$
à reta $4x + 3y = 5$. Resp.: 1, 2
31. Achar a equação da circunferência cujo centro é a origem e que passa
pela intersecção da reta $2x - y + 3 = 0$ com o eixo dos y .
Resp.: $x^2 + y^2 = 9$
32. O centro de uma circunferência tangente ao eixo x' é o ponto (3, 5).
Achar a equação da curva e os pontos de intersecção com o eixo y' .
Resp.: $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$, (0, 1) e (0, 9)
33. Achar a equação da circunferência que passa no ponto (5, 3) e cujo
centro é o ponto de intersecção das retas $3x + 2y - 12 = 0$ e
 $x - 2y + 4 = 0$. Resp.: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$
34. Achar a equação da circunferência que passa pela origem e cujo
centro é a intersecção das retas $5x - 4y - 3 = 0$ e $2x - 5y - 8 = 0$.
Resp.: $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$
- Achar a equação da circunferência que passa pelos três pontos :
35. (3, 2), (1, 0) e (0, 5) Resp.: $x^2 + y^2 - x - 5y = 0$
36. (10, 9), (4, -5) e (0, 5) Resp.: $x^2 + y^2 - 14x - 4y - 5 = 0$
37. Achar a equação da circunferência circunscrita ao triângulo, cujos
vértices são os pontos: A (1, 2), B (1, 3) e C (2, 5).
Resp.: $x^2 + y^2 - 9x - 5y + 14 = 0$
38. Achar a distância da origem ao centro da circunferência
 $x^2 + y^2 + 12y - 13 = 0$. Resp.: 6
39. Achar a distância do centro da circunferência $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 9 = 0$
e a intersecção das retas $7x - 2y - 31 = 0$ e $8x + 3y - 46 = 0$.
Resp.: 10
40. Achar a equação da circunferência em que um dos diâmetros tem
para extremidades os pontos (-4, 6) e (8, -10).
Resp.: $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 92 = 0$

5

derivadas

5.1 - Acréscimos. Chama-se **acrécimo** ou **incremento** da variável x , e representa-se pelo símbolo Δx (lê-se : delta x), a diferença entre dois valores quaisquer, x_1 e x_2 de seu domínio. Assim :

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

O valor x_1 denomina-se **valor inicial** e o acréscimo pode ser **positivo** ou **negativo**.

De modo geral, dado o ponto inicial x_1 , o acréscimo, em relação a um segundo ponto qualquer será :

$$\Delta x = x - x_1 \quad . \quad .$$

$$x = x_1 + \Delta x$$

(1)

Sendo $y = f(x)$, quando x passa do valor x_1 ao valor x_2 , a função passará de valor inicial $f(x_1)$ a $f(x_2)$ e a diferença

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

denomina-se **acrécimo** ou **incremento** da função.

Se usarmos a notação (1) para indicar um valor qualquer da variável a partir do ponto inicial x_1 , o acréscimo da função será, de modo geral :

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

(2)

Exemplos:

1.º Dada a função $y = x^2 + 3x + 1$, consideremos o valor inicial $x_1 = 0$ e um segundo valor $x_2 = 2$. Calcular o acréscimo da variável e o correspondente da função.

Temos: $\Delta x = 2 - 0 = 2$

E para a função: $y_1 = 1$

$$y_2 = 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 11$$

logo: $\Delta y = 11 - 1 = 10$

2.º Dada a função $y = x^2 - 5x + 7$, qual a expressão geral do acréscimo da função, a partir do ponto x_1 ?

De acôrdo com a igualdade (2), temos:

$$\begin{aligned}\Delta y &= [(x_1 + \Delta x)^2 - 5(x_1 + \Delta x) + 7] - (x_1^2 - 5x_1 + 7) \\ &= x_1^2 + 2x_1(\Delta x) + (\Delta x)^2 - 5x_1 - 5(\Delta x) + 7 - x_1^2 + 5x_1 - 7\end{aligned}$$

donde: $\Delta y = (2x_1 - 5) \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$

A razão entre os dois acréscimos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

denomina-se **razão incremental no ponto x_1** .

5.2 - Derivada em um ponto. Função derivada.

Seja $y = f(x)$ uma função definida e contínua no ponto a .

Chama-se **derivada da função no ponto a** ao limite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

quando este limite existe.

Diz-se, então, que a função é **derivável** no ponto a .

Uma nova função, denominada **função derivada** ou, apenas, **derivada** de $y = f(x)$ é definida análogamente; isto é, para todo número real x tal que exista a derivada no ponto x . Representando-a por $f'(x)$ virá:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

A derivada de $y = f(x)$ no ponto a será, então, exatamente $f'(a)$, empregando a nova notação.

Várias notações são usadas para representar a derivada:

$$y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, D_x y, D_x f(x), \dot{y}, \dot{f}(x)$$

Usaremos, apenas, as três primeiras e o símbolo Dy , para indicar que a função deve ser derivada.

Em termos vulgares a definição será:

Derivada é o limite da razão incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando Δx tende para zero.

5.3 - Regra geral de derivação. De acôrdo com a definição, o cálculo da função derivada se processa mediante quatro operações:

1.ª Atribui-se a x um acréscimo Δx . Obtém-se um novo valor de y , representado por $y + \Delta y$:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

2.ª Do novo valor obtido, subtrai-se o valor inicial de y , para obter Δy :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

3.ª Divide-se por Δx , a fim de obter a razão incremental:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

4.ª Toma-se o limite da razão quando Δx tende para zero:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Exemplo:

Achar a função derivada de $y = x^2 - 7x + 8$.

$$1) \quad y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) + 8 \\ = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 7x - 7 \cdot \Delta x + 8$$

$$\text{e} \quad y = x^2 - 7x + 8$$

$$2) \quad \Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 7 \Delta x$$

$$3) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - 7 + \Delta x$$

$$4) \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - 7$$

5.4 - Interpretação geométrica. Seja $y = f(x)$, tendo o gráfico da figura 36, uma função que admita derivada no ponto x_0 .

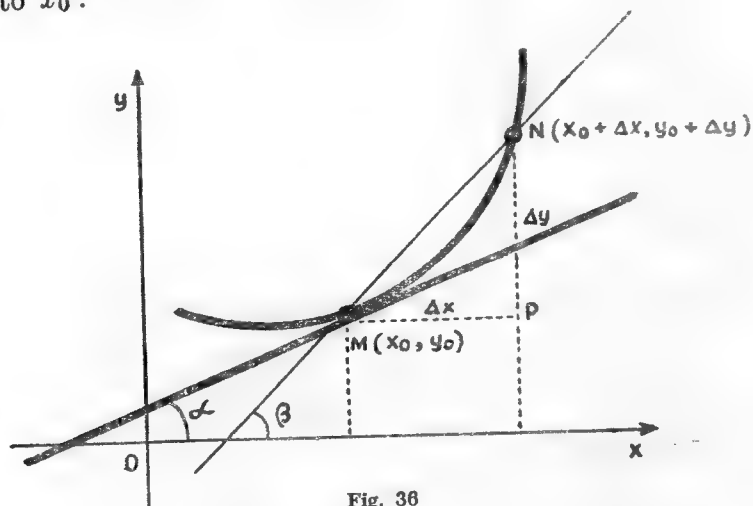


Fig. 36

Consideremos o ponto $M(x_0, y_0)$ e atribuíamos a x o acréscimo Δx . Obteremos o ponto $N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

O triângulo MNP dá:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \beta$$

Se Δx tender para zero, a reta MN terá por limite a tangente em M e o ângulo β tenderá para α . Temos, assim:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{ou} \quad y' = \operatorname{tg} \alpha$$

Resulta:

A derivada no ponto x_0 , isto é, $f'(x_0)$, é o coeficiente angular da tangente à curva $y = f(x)$ no ponto de abscissa x_0 .

Exemplo:

Achar o coeficiente angular da tangente à curva $y = x^3$, no ponto $x = 1$. Achar a equação dessa tangente.

Resolução. Aplicando a regra geral, encontraremos a derivada

$$y' = f'(x) = 3x^2$$

O coeficiente angular da tangente no ponto 1 será:

$$f'(1) = 3$$

No ponto de abscissa 1, a ordenada é $y = 1^3 = 1$; logo, a equação da tangente no ponto 1 será:

$$y - 1 = 3(x - 1) \quad \text{ou} \quad y - 3x + 2 = 0$$

5.5 - Interpretação cinemática. Suponhamos o ponto móvel, M , percorrendo a reta xy , a partir de O , no sentido da seta (fig. 37). No tempo t , terá percorrido um espaço e e a cada valor de t corresponderá um valor de e . Assim, temos:

$$e = f(t)$$



Fig. 37

Num intervalo de tempo: $\Delta t = t_2 - t_1$

o móvel terá percorrido o espaço: $\Delta e = MM_1$

O quociente $\frac{\Delta e}{\Delta t}$

representa, pois, a velocidade média do móvel no tempo Δt .

Se Δt tender para zero, o quociente tenderá para a velocidade no instante t_1 . Assim, se representarmos por v_1 a velocidade no instante t_1 , teremos:

$$v_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{de}{dt}$$

isto é

A derivada do espaço em relação ao tempo, no ponto t_1 , é a velocidade no instante t_1 .

Exemplo:

A lei de um movimento retilíneo é traduzida pela equação $e = t^2 + 5t$, cuja derivada é $e' = 2t + 5$. A unidade de comprimento sendo o quilômetro e de tempo, a hora, pede-se:

- a) a velocidade do móvel no instante em que tiverem decorrido quatro horas;
- b) no fim de quantas horas terá a velocidade de 65km/h?

Resolução. A velocidade num instante t é a derivada

$$v = 2t + 5$$

- a) No fim de quatro horas temos:

$$v = 8 + 5 = 13$$

- b) Quando a velocidade for de 65km/h teremos:

$$2t + 5 = 65 \quad \therefore \quad t = 30$$

Resp.: a) No fim de 4h a velocidade será 13km/h;

b) A velocidade será de 65km/h no fim de 30 horas.

REGRAS DE DERIVAÇÃO

5.6 — Primeiro grupo.

I — A derivada de uma constante é nula.

Se $y = k$, uma constante, não se altera com o atribuir-se um acréscimo Δx à variável. Assim, temos:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k - k}{\Delta x} = 0$$

II — A derivada da variável independente é a unidade.

Seja $y = x$, teremos:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1$$

III — A derivada de uma função de função é igual ao produto das derivadas das funções em relação às suas variáveis imediatas.

Sejam $y = f(v)$ e $v = f_1(x)$

Temos a identidade:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta v} \times \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

donde, passando ao limite:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \times \frac{dv}{dx}$$

Exemplo:

Sejam $y = v^2$ e $v = 2x$

Aplicando a regra geral, obteremos, facilmente:

$$\frac{dy}{dv} = 2v \quad \text{e} \quad \frac{dv}{dx} = 2$$

donde, pela regra III:

$$\frac{dy}{dx} = [2v \times 2] = 4v = 4 \times 2x = 8x$$

IV — A derivada de uma função inversa é o inverso da derivada da função direta.

Sejam $y = f(x)$ e $x = \varphi(y)$ duas funções inversas.

Para $\Delta x \neq 0$ temos também $\Delta y \neq 0$; logo podemos escrever a identidade:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Passando ao limite:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Exemplo:

Seja $y = \sqrt{x}$

Teremos a função inversa: $x = y^2$

A derivada desta última será:

$$\frac{dx}{dy} = 2y$$

Logo, pela regra IV:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

5.7 — Segundo grupo: funções algébricas.

V — Derivada de uma soma.

A derivada de uma soma de funções deriváveis de x é igual à soma das derivadas das funções, supostas finitas tôdas as derivadas.

Seja

$$y = u + v - w$$

A um acréscimo Δx da variável corresponderão os acréscimos Δu , Δv e Δw das funções e, conseqüentemente, um acrés-

cimo Δy da soma; assim, teremos, aplicando a regra geral (n.º 5.3):

$$1) \quad y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - (w + \Delta w)$$

$$2) \quad \begin{array}{r} y = u \qquad \qquad \qquad + \quad v - w \\ \hline \Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w \end{array}$$

$$3) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$4) \quad \boxed{y' = u' + v' - w'}$$

Conseqüência.

Se C é uma constante e $y = f(x) + C$, temos:

$$y' = f'(x)$$

pois a derivada de C é nula.

VI — Derivada de um produto.

1.º CASO: Dois fatores. Sejam u e v duas funções deriváveis de x e

$$y = uv$$

Ao acréscimo Δx corresponderão os acréscimos Δu e Δv e, conseqüentemente, um acréscimo Δy para o produto.

Aplicando a regra geral do n.º 5.3, teremos:

$$1) \quad y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$ou \quad y + \Delta y = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$$

$$2) \quad \begin{array}{r} y = uv \\ \hline \Delta y = u \cdot \Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v \end{array}$$

$$3) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot (v + \Delta v)$$

4) Como Δv tende para zero com Δx , temos o limite:

$$y' = uv' + vu'$$

2.º CASO: *Mais de dois fatores.* Seja

$$y = uv$$

A propriedade associativa permite escrever:

$$y = u(vt)$$

e pelo primeiro caso:

$$y' = u'vt + u(vt)' = u'vt + u(v't + vt')$$

donde, finalmente:

$$y' = u'vt + v'ut + t'uv$$

Conclui-se:

A derivada de um produto de funções deriváveis de x é igual à soma dos produtos da derivada de cada fator por todos os outros.

Consequência.

Se c é constante e $y = c \cdot f(x)$, conclui-se:

$$y' = c \cdot f'(x)$$

VII — *Derivada de uma potência* (expoente inteiro e positivo).

Seja

$$y = u^m$$

Teremos, por ser m inteiro, positivo:

$$(1) \quad y = u \cdot u \cdot \dots \cdot u \text{ (} m \text{ fatores)}$$

Donde se conclui, pela regra do produto:

$$(2) \quad y' = u' \cdot \underbrace{u \cdot \dots \cdot u}_{m-1 \text{ fatores}} + u' \cdot \underbrace{u \cdot \dots \cdot u}_{m-1 \text{ fatores}} + \dots + u' \cdot \underbrace{u \cdot \dots \cdot u}_{m-1 \text{ fatores}}$$

Como o produto (1) tem m fatores e a cada fator que se deriva corresponde uma parcela da igualdade (2), vem:

$$y' = mu^{m-1} u'$$

Aplicações:

1.ª *Derivada de um monômio.*

Seja o monômio $y = ax^m$

O fator a é constante. Logo, pela consequência da regra VI:

$$y' = a \cdot Dx^m$$

e, pela regra da potência:

$$y' = m \cdot ax^{m-1} \cdot Dx = max^{m-1}$$

Exemplos:

$$1.º \quad y = 10x^3 \quad \therefore \quad y' = 10 \cdot 3x^2 = 30x^2$$

$$2.º \quad y = \frac{3}{4}x^2 \quad \therefore \quad y' = \frac{3}{4} \cdot 2x = \frac{3}{2}x$$

2.ª *Derivada de um polinômio.*

O polinômio é uma soma algébrica de monômios; logo, a derivada obtém-se derivando cada um dos termos (regra V).

Exemplos:

$$1.º \quad \text{De } y = 3x^2 - 8x + 13, \text{ conclui-se: } y' = 6x - 8.$$

$$2.º \quad \text{De } y = 4x^3 + 5x^2 - 3x + 7, \text{ tira-se: } y' = 12x^2 + 10x - 3.$$

$$3.º \quad \text{Para a potência de um polinômio, como:}$$

$$y = (x^2 - 3)^5$$

virá, pela Regra VII:

$$\text{ou} \quad y' = 5(x^2 - 3)^4 \cdot D(x^2 - 3) = 5(x^2 - 3)^4 \cdot 2x$$

$$4.º \quad \text{Se } y = (x^2 + 5)(2x - 1), \text{ teremos (Regra VI):}$$

$$y' = (x^2 + 5) \cdot D(2x - 1) + (2x - 1) \cdot D(x^2 + 5)$$

$$\text{ou} \quad y' = (x^2 + 5) \cdot 2 + (2x - 1) \cdot 2x$$

$$y' = 6x^2 - 2x + 10$$

VIII — Derivada de um quociente.

Seja $y = \frac{u}{v}$

Aplicamos a regra geral :

$$1) \quad y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$2) \quad y = \frac{u}{v}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v \cdot \Delta u - uv - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

ou $\Delta y = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}$

$$3) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

4) Se Δx tender para zero, Δu e Δv também tenderão ; logo, o limite será :

$$y' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$$

Exemplo :

Derivar $y = \frac{x-3}{x+2}$

A regra VIII dará :

$$y' = \frac{(x+2) \cdot D(x-3) - (x-3) \cdot D(x+2)}{(x+2)^2}$$

ou $y' = \frac{(x+2) \cdot 1 - (x-3) \cdot 1}{(x+2)^2}$

e finalmente : $y' = \frac{5}{(x+2)^2}$

IX — Derivada de uma raiz.

Seja $y = \sqrt[m]{u}$, onde y e u são funções de x .

A inversa é :

$$u = y^m$$

que tem para derivada (regra da potência) :

$$u' = m y^{m-1} y'$$

donde :

$$y' = \frac{u'}{m y^{m-1}}$$

Substituindo y por seu valor :

$$y' = \frac{u'}{m \sqrt[m]{u^{m-1}}}$$

OBSERVAÇÕES :

1.ª) Se escrevermos a raiz com a forma de potência e aplicarmos a regra correspondente, virá :

$$y = u^{\frac{1}{m}} \therefore y' = \frac{1}{m} \cdot u^{\frac{1}{m}-1} \cdot u'$$

ou $y' = \frac{1}{m} \cdot u^{-\frac{m-1}{m}} \cdot u' = \frac{u'}{m \sqrt[m]{u^{m-1}}}$

Chegamos, dêsse modo, ao mesmo resultado e concluímos ser aplicável a regra da potência para o expoente fracionário.

2.ª) Para o caso da raiz quadrada, virá:

$$y = \sqrt{u} \therefore y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

isto é, a derivada da raiz quadrada é a derivada do radicando dividida pelo dobro da raiz.

Exemplos:

1.º) Derivar $y = \sqrt{2x+3}$

Temos: $y' = \frac{D(2x+3)}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$

2.º) De $y = \sqrt[3]{(3x+1)^2}$ ou $y = (3x+1)^{\frac{2}{3}}$

Conclui-se: $y' = \frac{2}{3}(3x+1)^{-\frac{1}{3}} \cdot D(3x+1)$

$$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{3x+1}} \cdot 3$$

e, finalmente,

$$y' = \frac{2}{\sqrt[3]{3x+1}}$$

5.8 — Terceiro grupo: funções transcendentais.

X — Derivada da função logarítmica.

Seja $y = \log_a x$

Aplicando a regra geral, teremos:

1) $y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$

2) $\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \cdot \frac{x + \Delta x}{x}$

ou $\Delta y = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$ (1)

Façamos $\frac{\Delta x}{x} = \alpha \Rightarrow \Delta x = \alpha \cdot x$

Assim, quando Δx tender para zero, α também tenderá para zero.

3) Dividamos a igualdade (1) por Δx ou, o que é o mesmo, por αx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\alpha \cdot x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a (1 + \alpha)}{\alpha}$$

isto é: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$

4) Passando ao limite e lembrando ser $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$:

$$y' = \frac{\log_a e}{x}$$

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Se $y = \ln x$, teremos: $y' = \frac{1}{x}$ pois $\ln e = 1$.

2.ª) Se $y = \ln u$ teremos (Regra III): $y' = \frac{1}{u} u' = \frac{u'}{u}$.

Exemplo: A derivada de $y = \ln(x^2 + 5)$ será:

$$y' = \frac{D(x^2 + 5)}{x^2 + 5} = \frac{2x}{x^2 + 5}$$

XI — Derivada da função exponencial.

Seja $y = a^x$

A inversa é:

$$x = \log_a y$$

Temos, então (regra X):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\log_a e}{y}$$

Logo, pela regra IV:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\log_a e}$$

e, finalmente, substituindo y :

$$y' = \frac{a^x}{\log_a e}$$

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Se $y = e^x$, teremos:

$$y' = e^x$$

pois $\log_e e = 1$.

2.ª) Se $y = a^u$ ou $y = e^u$, sendo y e u funções de x , temos (Regra III), respectivamente:

$$y' = \frac{a^u}{\log_a e} \cdot u' \quad \text{ou} \quad y' = e^u \cdot u'$$

Exemplo: A derivada de $y = 5^{2x}$ será:

$$y' = \frac{5^{2x}}{\log_5 e} \cdot 2 = \frac{2 \cdot 5^{2x}}{\log_5 e}$$

3.ª) FUNÇÃO EXPONENCIAL GERAL. Seja $y = u^v$, onde u e v são funções de x . Tomando os logaritmos, vem:

$$\log y = v \cdot \log u$$

Derivando os dois membros (regras VI, X e III):

$$\frac{y'}{y} = v' \cdot \log u + v \cdot \frac{u'}{u} \quad \therefore \quad y' = u^v \cdot \log u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$$

Exemplo. A derivada de $y = x^{lx}$, será:

$$y' = x^{lx} \cdot lx \cdot \frac{1}{x} + lx \cdot x^{lx-1} \cdot l \cdot x \quad \therefore \quad y' = 2lx \cdot x^{lx-1}$$

XII — Derivada do seno.

Seja $y = \sin x$

Teremos, pela regra geral:

$$1) \quad y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$2) \quad \begin{aligned} \Delta y &= \sin(x + \Delta x) - \sin x \\ &= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \end{aligned}$$

$$3) \quad \begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \\ &= \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \end{aligned}$$

$$4) \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = 1 \times \cos x$$

e, finalmente:

$$y' = \cos x$$

OBSERVAÇÃO: Para

$$y = \sin u$$

teremos (Regra III):

$$y' = \cos u \cdot u'$$

XIII — *Derivada do co-seno.*

Seja $y = \cos x$

Temos: $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

e, portanto (regra XII):

$$y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot D\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

e, finalmente $y' = \sin x (-1) = -\sin x$

Para $y = \cos u$

teremos:

$$y' = -\sin u \cdot u'$$

XIV — *Derivada da tangente.*

Seja $y = \operatorname{tg} x$

Temos: $y = \frac{\sin x}{\cos x}$

Pela regra do quociente, vem:

$$y' = \frac{\cos x \cdot D(\sin x) - \sin x D(\cos x)}{\cos^2 x}$$

ou $y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

e, finalmente:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ou

$$y' = \sec^2 x$$

Para

$$y = \operatorname{tg} u$$

virá:

$$y' = \sec^2 u \cdot u'$$

Exemplos:

1.º) A derivada de $y = \cos x + \operatorname{tg} x$ será:

$$y' = -\sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$$

2.º) A derivada de $y = \sin x - x \cdot \cos x$ será:

$$y' = \cos x - (\cos x - x \sin x)$$

$$y' = x \cdot \sin x$$

XV — *Derivada da co-tangente.*

Se $y' = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

então $y' = \frac{\sin x \cdot D \cos x - \cos x \cdot D \sin x}{\sin^2 x}$

$$y' = -\frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

donde

$$y' = -\operatorname{csc}^2 x$$

e para $y = \cot u$ tem-se:

$$y' = -\operatorname{csc}^2 u \cdot u'$$

XVI — *Derivada da secante e da co-secante.*

Ainda pela regra do quociente obteremos:

Se $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ então $y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

e $y = \operatorname{csc} x = \frac{1}{\sin x}$ dá $y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

XVII — *Funções circulares inversas.*

Seja $y = \operatorname{arc} \sin x$ donde $x = \sin y$ (1)

Derivando (1), vem: $\frac{dx}{dy} = \cos y$

e, portanto, (regra IV): $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$ (2)

De (1) conclui-se: $\cos y = \sqrt{1-x^2}$

e, substituindo em (2): $\frac{dy}{dx}$ ou $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

E, para $y = \arcsen u$: $y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

Procedendo de modo análogo, obteremos:

$$D \cdot \arccos u = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \quad D \arctg u = \frac{u'}{1+u^2},$$

$$D \operatorname{arccot} u = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

5.9 - Derivadas sucessivas. Dada $y = f(x)$

consideremos a derivada: $y' = f'(x)$

A derivada desta nova função denomina-se **derivada de segunda ordem** de $f(x)$ e representa-se pelos símbolos:

$$y'', \quad f''(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad D_x^2$$

Analogamente, a derivada de $f''(x)$ será a derivada de terceira ordem de $f(x)$ e, assim, por diante.

Exemplo:

Achar as derivadas sucessivas de

$$y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7x + 1$$

Teremos:

$$y' = 12x^3 - 15x^2 + 4x - 7$$

$$y'' = 36x^2 - 30x + 4$$

$$y''' = 72x - 30$$

$$y^{iv} = 72$$

5.10 - Diferencial. Seja $y = f(x)$ uma função que admite uma derivada $f'(x)$. Chama-se **diferencial de primeira ordem** ou apenas **diferencial** e representa-se por dy , a expressão:

$$(1) \quad dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

Se considerarmos como função a própria variável, $y = x$, teremos:

$$dx = \Delta x$$

Substituindo em (1) obtemos a expressão da diferencial:

$$(2) \quad \boxed{dy = f'(x) \cdot dx}$$

OBSERVAÇÃO: Da igualdade (2) resulta: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

Dêsse modo, $\frac{dy}{dx}$ tanto pode ser considerada símbolo da derivada, como a razão entre os diferenciais da função e da variável independente.

5.11 - Interpretação geométrica da diferencial.

Seja $y = f(x)$

a função representada pela curva da fig. 38 e MM' a tangente no ponto $M(x_1, y_1)$. Seja

$$M'(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$$

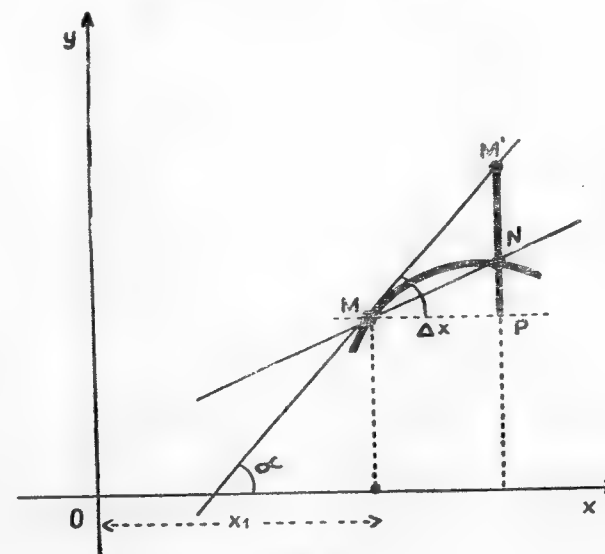


Fig. 38

o ponto da tangente obtido atribuindo o acréscimo Δx à abscissa. Teremos, no triângulo MPM'

$$PM' = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

donde

$$PM' = f'(x) \cdot \Delta x = dy$$

Assim, a diferencial dy é o acréscimo da ordenada da tangente em um ponto quando a abscissa sofre um acréscimo Δx .

5.12 — Resumo. Formulário.

FUNÇÕES ALGÉBRICAS	FUNÇÕES TRANSCENDENTES
$Dk = 0$	$Dlu = \frac{u'}{u}$
$Dx = 1$	$D.a^u = \frac{a^u}{\log_a e} \cdot u'$
$D(u+v-w) = u' + v' - w'$	$D.e^u = e^u \cdot u'$
$D(uv) = uv' + vu'$	$D.u^v = u^v \cdot lu \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$
$D \frac{u}{v} = \frac{vu' - uv'}{v^2}$	$D.\operatorname{sen} u = \cos u \cdot u'$
$Du^m = mu^{m-1} \cdot u'$	$D \cos u = -\operatorname{sen} u \cdot u'$
$Dax^m = a \cdot mx^{m-1}$	$D.\operatorname{tg} u = \sec^2 u \cdot u'$
$D \sqrt[m]{u} = \frac{u'}{m \sqrt[m]{u^{m-1}}}$	$D.\cot u = -\operatorname{csc}^2 u \cdot u'$
	$D.\sec u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos^2 u} \cdot u'$
	$D.\csc u = -\frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 u} \cdot u'$
FUNÇÕES CIRC. INVERSAS	
$D.\operatorname{arc} \operatorname{sen} u = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$D.\operatorname{arc} \operatorname{tg} u = \frac{u'}{1+u^2}$
$D.\operatorname{arc} \cos u = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$D.\operatorname{arc} \cot u = -\frac{u'}{1+u^2}$

EXERCÍCIOS

Aplicar a regra geral das quatro operações para achar a derivada das funções (respostas no fim dos exercícios):

- $y = 7x$
- $y = 3 + x^2$
- $y = \frac{1}{x}$
- $y = x^2 - 7x + 13$
- $y = x^2$
- $y = \frac{4x+3}{5x-7}$

Achar as derivadas, aplicando as regras práticas mais simples:

- $y = 2x^2 - 7x + 1$
- $y = 6x^3 + 2x^2 - 8x + \sqrt{7}$
- $y = x^5 + 4x^4 - 3x^2 + 18x - 23$
- $y = -4x^5 - 8x^4 - 7x^2 + \sqrt{5} \cdot x - \sqrt{13}$
- $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{8}$
- $y = x^{13} - x^7 + 5$
- $y = (x^3 + 3)^3$
- $y = (x^2 - 5x + 7)(3x^3 - 18)$
- $y = \frac{1}{3x-5}$
- $y = \frac{3x+5}{2x-7}$
- $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
- Dada $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+2}}$, calcular $f'(0)$ e $f'(2)$.

$$\text{Resp.: } -\frac{1}{4\sqrt{2}} \text{ e } -\frac{1}{16}$$

- Achar os valores de x que anulam $f'(x)$, sendo $f(x) = x^3 - 3,5x^2 - 6x + 19$.

$$\text{Resp.: } 3 \text{ e } -2/3$$

Achar a equação das tangentes às seguintes curvas, nos pontos indicados:

- $y = 2x^2 + 5x - 7$ no ponto $(0, -7)$
- $y = 3 + \frac{1}{x}$ no ponto $(1, 4)$

$$\text{Resp.: } 5x - y - 7 = 0$$

$$\text{Resp.: } x + y - 5 = 0$$

33. $y = \sqrt{x}$ no ponto (1, 1) Resp.: $x - 2y + 1 = 0$
 34. $y = x^2$ no ponto (2, 4) Resp.: $4x - y - 4 = 0$
 35. $y = \sqrt{9-x^2}$ no ponto (3, 0) Resp.: $x = 3$
 36. $y = \frac{1}{x}$ no ponto (1, 1) Resp.: $x + y = 0$
 37. Achar a equação da tangente à curva $y = x^2 + 3x - 1$ no ponto em que $y = -1$. Resp.: $3x - y - 1 = 0$ ou $3x + y + 10 = 0$
 38. Em que pontos a tangente à curva $f(x) = x^3 - 12x + 1$ é paralela ao eixo dos x ? Resp.: (2, -15) e (-2, 17)
 39. Achar a equação da tangente à curva da equação $y = x^3 - 4x + 1$, que é perpendicular à reta $2y + x - 5 = 0$ Resp.: $2x - y - 8 = 0$
 40. Achar a equação da tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 16$, que é paralela à reta $x - y - 5 = 0$. Resp.: $x - y \pm 4\sqrt{2} = 0$
 41. Dada a equação de um movimento retilíneo, $e = 2t^2 - 3t$, achar a distância, em km, percorrida e a velocidade, em km/h, no fim de 10h. Resp.: 170km e 37km/h
 42. A equação $e = 3t^2 + 2t - 1$ traduz um movimento retilíneo. Pede-se: a) a velocidade em km/h no fim de 5h; b) no fim de quanto tempo a velocidade será de 92km/h? Resp.: 32km/h; 15h

Achar as derivadas das funções:

43. $y = e^{-x}$ | 46. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ | 48. $y = e^{\lg x}$ | 50. $y = \frac{e^x}{l(1+x)}$
 44. $y = e^{2x-3}$ | 47. $y = e^{\sin x}$ | 49. $y = l \cdot \frac{1+x}{1-x}$
 51. $y = 3 \sin 2x$ Resp.: $6 \cos 2x$
 52. $y = l \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ Resp.: $\frac{1}{1-x^2}$
 53. $y = e^x \cdot \cos x$ Resp.: $e^x (\cos x - \sin x)$
 54. $y = \frac{\lg x - 1}{\sec x}$ Resp.: $\sin x + \cos x$
 55. Sendo $f(x) = l \frac{1+x}{1-x}$, calcular $f'(1)$ Resp.: 2
 56. Sendo $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$, calcular $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ Resp.: -2
 57. Achar a equação da tangente à curva $y = lx$ no ponto em que $x = e$. Resp.: $x - ey = 0$

58. Achar a terceira derivada de $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 18$ Resp.: 6
 59. Calcular $f''(0)$ sendo $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 1$ Resp.: -10
 60. Achar tôdas as derivadas de $y = 4x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$.
 Resp.: $y' = 16x^3 - 6x^2 - 10x + 2$, $y'' = 48x^2 - 12x - 10$,
 $y''' = 96x - 12$, $y^{IV} = 96$
 61. Calcular a terceira derivada de $y = l \cdot \sin x$.
 Resp.: $y''' = \frac{\sin 2x}{\sin^4 x}$
 62. Achar $f''(1)$, sendo $f(x) = x \cdot e^x$ Resp.: 3e
 63. Calcular $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, sendo $f(x) = 5 \cdot \cos 2x$. Resp.: -10
 64. Achar os valores de x que anulam a primeira derivada de $y = x \cdot l \cdot x$
 Resp.: 1/e

Achar a derivada de ordem n das funções:

65. $y = e^x$ Resp.: e^x
 66. $y = x \cdot e^x$ Resp.: $e^x (x + n)$
 67. Calcular $f'(\pi)$, sendo $f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$. Resp.: -2

Achar as diferenciais de:

68. $y = e^x \cdot \sin x$ Resp.: $dy = (\sin x + \cos x) e^x \cdot dx$
 69. $y = lx$ Resp.: $dy = \frac{1}{x} dx$
 70. $y = l(1-x)$ Resp.: $\frac{-dx}{1-x}$

RESPOSTAS:

- | | | |
|--------------|--|---------------------------------------|
| 1. 7 | 6. $-\frac{43}{(5x-7)^2}$ | 9. $5x^4 + 16x^3 - 6x + 18$ |
| 2. $2x$ | | 10. $-20x^4 - 32x^3 - 14x + \sqrt{5}$ |
| 3. $-x^{-2}$ | | 11. $2x^2 + 5x - 4$ |
| 4. $2x - 7$ | 7. $4x - 7$ | 12. $13x^{12} - 7x^6$ |
| 5. $2x$ | 8. $18x^2 + 4x - 8$ | 13. $6x^5 + 36x^3 + 54x$ |
| | 14. $15x^4 - 60x^3 + 63x^2 - 36x + 90$ | |

variação das funções máximos e mínimos

6.1 - Funções crescentes e decrescentes.

1.^a DEFINIÇÃO. Uma função, $f(x)$, contínua em um intervalo (x_1, x_2) é **crescente** em um ponto $x = a$ desse intervalo (fig. 39) se tivermos a partir de a , sendo Δx positivo:

$$1) \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} > 0$$

$$2) \frac{f(a - \Delta x) - f(a)}{-\Delta x} > 0$$

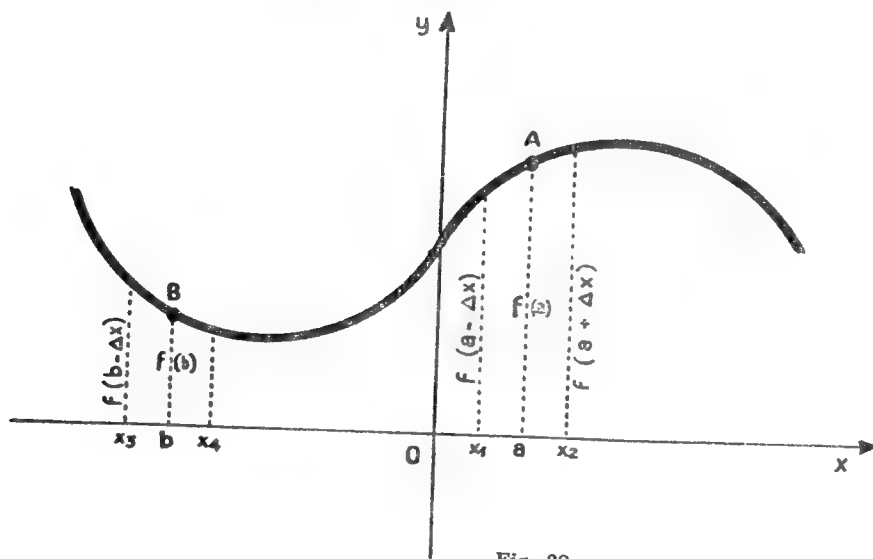


Fig. 39

Isto é, a função é **crescente** no ponto a se, a partir desse ponto, o acréscimo da função e o acréscimo da *variável* tiverem o mesmo sinal.

2.^a DEFINIÇÃO. A $f(x)$, nas mesmas condições, diz-se **decrescente** no ponto $x = b$ (fig. 39) se tivermos:

$$1) \frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x} < 0$$

$$2) \frac{f(b - \Delta x) - f(b)}{-\Delta x} < 0$$

Isto é, se o *acréscimo da função* e o *acréscimo da variável* tiverem *sinais contrários*.

Uma função diz-se **crescente** (ou **decrescente**) num intervalo quando é **crescente** (ou **decrescente**) em todos os pontos do intervalo.

6.2 - Sinal da derivada. Se a derivada duma função for **positiva** para $x = a$, isto é, $f'(a) > 0$, a função é **crescente** no ponto a . Se a derivada for **negativa**, a função é **decrescente**.

Realmente, por definição de derivada, teremos, sem restrição sobre o sinal de Δx :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a)$$

Assim $f'(a)$ tomará o sinal da expressão

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

a partir de um certo valor Δx_1 de Δx e o conservará para $|\Delta x| < |\Delta x_1|$. Logo, de acordo com as definições 6.1 teremos:

Se $f'(a) > 0$, $f(x)$ é **crescente** no ponto a ;

Se $f'(a) < 0$, $f(x)$ é **decrescente** no ponto a (*).

(*) Demonstração e fig. 39 de LUCIEN GODAUX — *Analise Mathématique*. Liège, 1946.

Exemplo:

Estudar o sentido da variação da função $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 7$.
(Vide gráfico aproximado da fig. 40).

Resolução. A derivada é

$$y' = f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$$

O sinal desta derivada será o sinal do trinômio $6x^2 - 18x - 24$ que determinaremos resolvendo a equação (Matemática — 4.ª Série Ginasial):

$$6x^2 - 18x - 24 = 0$$

cuja raízes são: $x_1 = -1$ e $x_2 = 4$.

Assim, $f'(x)$ é negativa para os valores de x compreendidos entre as raízes (sinal contrário ao de a) e, portanto, neste intervalo, $f(x)$ é decrescente. Podemos reunir as conclusões no seguinte quadro:

x	$-\infty \dots -1$	$\dots +4 \dots +\infty$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	Crescente	Decrescente

OBSERVAÇÃO: Quando $f'(a) = 0$, como $f'(-1)$ e $f'(4)$, diz-se que a função tem um **ponto crítico**, onde deixa de crescer para decrescer (ponto **máximo**, M , $(-1, 20)$, fig. 40), ou deixa de decrescer para crescer (ponto **mínimo**, M , $(4, -105)$ fig. 40).

6.3 — Máximos e mínimos.

1.ª DEFINIÇÃO. Uma função, $f(x)$, tem um **máximo** no ponto a , quando os valores da função, nas vizinhanças de a , são menores que $f(a)$. Isto é, sendo Δx um acréscimo positivo:

$$f(a + \Delta x) < f(a) \quad \text{e} \quad f(a - \Delta x) < f(a)$$

para um certo valor de Δx e todos os inferiores.

O ponto $M(-1, 20)$, na figura 40, é um máximo: $f(-1) = 20$.

2.ª DEFINIÇÃO. Uma função tem um **mínimo** no ponto a se, nas mesmas condições anteriores, tivermos:

$$f(a + \Delta x) > f(a) \quad \text{e} \quad f(a - \Delta x) > f(a)$$

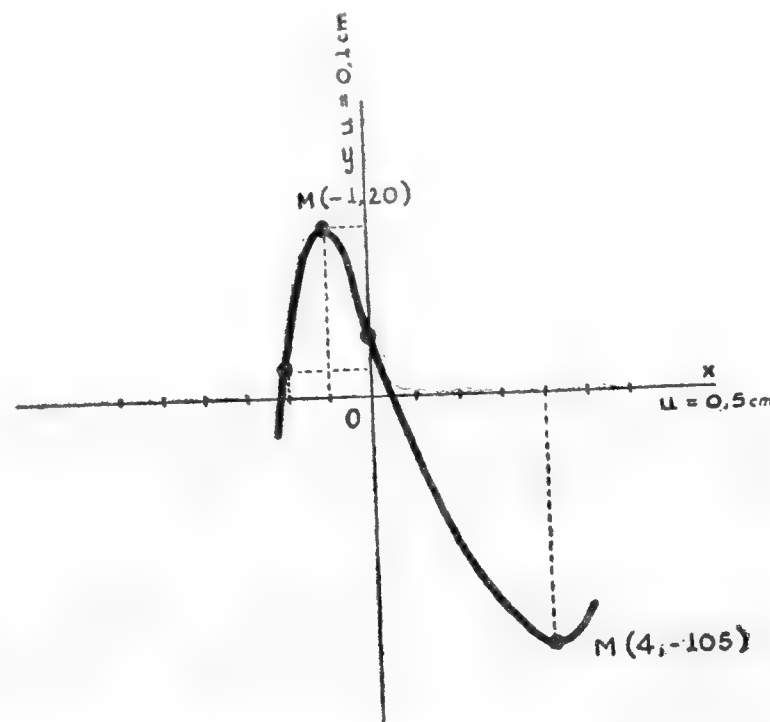


Fig. 40

Observe-se que o fato do ponto A não ser o mais elevado da curva é irrelevante. É o mais elevado em *certo intervalo da curva*.

6.4 — Cálculo dos máximos e mínimos.

a) Máximo. Considerando as duas condições que correspondem a um ponto **máximo**, podemos concluir para os acréscimos da função:

$$\begin{aligned} f(a - \Delta x) - f(a) &< 0 \\ f(a + \Delta x) - f(a) &< 0 \end{aligned}$$

Dividindo pelo acréscimo da variável:

$$(1) \quad \frac{f(a - \Delta x) - f(a)}{-\Delta x} > 0$$

$$(2) \quad \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} < 0$$

Passando aos limites quando $\Delta x \rightarrow 0$, teremos, por definição de derivada:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a - \Delta x) - f(a)}{-\Delta x} = f'(a)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a)$$

Assim, os dois limites são iguais a $f'(a)$ e, como a primeira razão (1) é sempre positiva e a segunda (2), sempre negativa, conclui-se que os limites só podem ser iguais se forem nulos; logo:

$$f'(a) = 0$$

Observemos que num ponto máximo, como $M(-1, 20)$ na figura 40, a derivada $f'(x)$ é positiva à esquerda (desigualdade 1) e negativa à direita (desigualdade 2). Assim, no ponto máximo, $f'(x)$ é *decrecente* e, portanto, sua derivada, isto é, $f''(x)$ será negativa.

Temos então:

$$x = a \text{ corresponde a } \textit{máximo} \text{ se } \begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) < 0 \end{cases}$$

b) **Mínimo.** Por considerações inteiramente análogas, concluiremos:

$$x = a \text{ corresponde a } \textit{mínimo} \text{ se } \begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) > 0 \end{cases}$$

Dai decorrem duas maneiras de calcular os máximos e mínimos.

Primeira:

- 1) Calcula-se a derivada $f'(x)$ e resolve-se a equação:
 $f'(x) = 0$

Seja x_1 uma raiz.

- 2) Calcula-se $f''(x_1)$. Se tivermos:

$$f''(x_1) < 0 \rightarrow \textit{máximo}$$

se

$$f''(x_1) > 0 \rightarrow \textit{mínimo}$$

Segunda:

- 1) Acham-se, como anteriormente, as raízes de $f'(x) = 0$. Seja x_1 uma raiz.
- 2) Determina-se o sinal de $f'(x_1 - h)$ e $f'(x_1 + h)$, podendo-se para isso, em certos casos, omitir o cálculo do valor numérico para valores de h suficientemente pequenos:
 - a) se $f'(x_1 - h) > 0$ e $f'(x_1 + h) < 0 \rightarrow \textit{máximo}$
 - b) se $f'(x_1 - h) < 0$ e $f'(x_1 + h) > 0 \rightarrow \textit{mínimo}$

Exemplo:

1.º Calcular os máximos e mínimos da função $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 7$ (gráfico da fig. 40).

Resolução.

$$1) \text{ Temos: } y' = f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$$

As raízes de $6x^2 - 18x - 24 = 0$, são:

$$x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 4$$

- 2) A segunda derivada é:

$$y'' = f''(x) = 12x - 18$$

e tem-se:

$$a) \quad f''(-1) = 12(-1) - 18 < 0$$

Logo, para $x = -1$ a função tem o *máximo*:

$$y = f(-1) = -9 + 24 + 7 = 20 \text{ [ponto } M(-1, 20) \text{ da fig. 40]}$$

$$b) \quad f''(4) = 48 - 18 > 0$$

Logo, para $x = 4$ a função tem o *mínimo*:

$$y = f(4) = 128 - 144 - 96 + 7 = -105 \text{ [ponto } M(4, -105) \text{ da fig. 40]}$$

2.º) Calcular os máximos e mínimos de $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

Resolução.

1) Primeira derivada:

$$y' = f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1)$$

As raízes da equação $12x^2(x - 1) = 0$, são:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = x_3 = 0$$

2) Segunda derivada:

$$y'' = f''(x) = 36x^2 - 24x = 12x(3x - 2)$$

a) Para $x = 1$, temos: $f''(1) = 12 > 0$

Logo, no ponto $x = 1$, a função tem o *mínimo*:

$$y = f(1) = 3 - 4 + 1 = 0$$

O ponto do gráfico será: $m(1, 0)$.

b) Para $x = 0$, temos: $f''(0) = 0$.

Assim, o processo da segunda derivada nada permite concluir e devemos aplicar o segundo processo:

$$f'(0 - h) < 0$$

$$f'(0 + h) < 0$$

Conclui-se que, no ponto $x = 0$, a função não tem máximo nem mínimo.

6.5 – Interpretação geométrica. Nos pontos máximos e mínimos a tangente à curva é paralela ao eixo dos x , visto ter o coeficiente angular nulo ($f'(x) = 0$).

No gráfico da figura 40, temos:

$$\text{equação da tangente em } M(-1, 20): \quad y = 20$$

$$\text{equação da tangente em } M(4, -105): \quad y = -105$$

6.6 – Pontos de inflexão. Chama-se ponto de inflexão um ponto tal como I na figura 41, onde a tangente atravessa a curva e esta muda o sentido de sua concavidade.

Observe-se que na vizinhança do ponto I o ângulo α da tangente decresce para, em seguida, crescer ou vice-versa.

Como $\tan \alpha$, para $\alpha < \frac{\pi}{2}$, varia no mesmo sentido de α , resulta que, num ponto de inflexão como I da figura 41, $\tan \alpha = f'(x)$ tem um mínimo logo, conclui-se:

$$f''(x) = 0$$

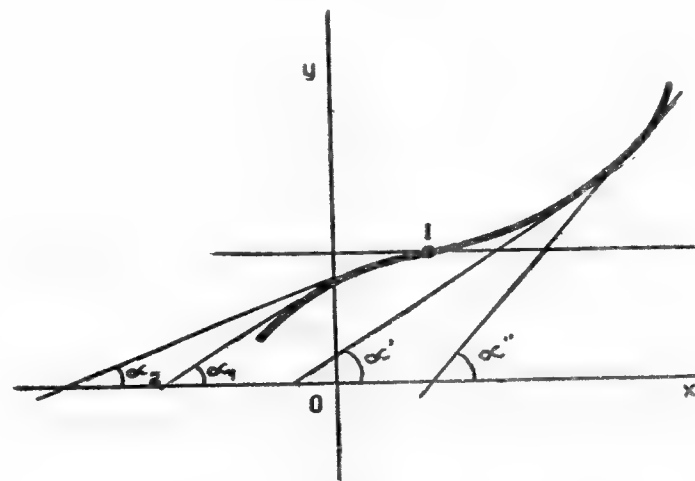


Fig. 41

A mesma conclusão chegaríamos no caso de $\tan \alpha = f'(x)$ ter um máximo.

Assim, num ponto de inflexão tem-se:

$$f''(x) = 0$$

Exemplo:

Achar os pontos de inflexão de $y = x^3$.

Temos:

$$y' = 3x^2$$

$$y'' = 6x$$

$$y'' = 0 \text{ quando } x = 0$$

A curva tem um ponto de inflexão no ponto de abscissa zero, e, portanto, no ponto $(0, 0)$.

6.7 — Estudo da variação de uma função. Para estudar a variação de uma função determinam-se:

- 1.º) O campo de existência da função, isto é, o domínio da variável x .
- 2.º) Os pontos críticos: máximos, mínimos e inflexão.
- 3.º) Os polos (valores de x que tornam a função infinita).
- 4.º) Os zeros (valores de x que anulam a função).
- 5.º) Traça-se o gráfico.

Exemplo:

Estudar a variação da função:

$$y = \frac{3x^2 - 7x + 2}{2x^2 - 3x - 2}$$

e traçar o gráfico correspondente.

(E. Naval, 1939)

RESOLUÇÃO

1. CAMPO DE EXISTÊNCIA. CONTINUIDADE.

Os valores de x que anulam o denominador são as raízes da equação:

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

que resolvida dá:

$$x_1 = 2 \text{ e } x_2 = -0,5.$$

A raiz 2 anula também o numerador; a função é definida e contínua nos intervalos:

$$]-\infty; -0,5[\text{ e }]-0,5; +\infty[$$

excluído em ambos o valor $-0,5$, ao qual corresponde uma descontinuidade (fig. 41a).

O valor $x = 2$ anula os dois termos da fração, cujo verdadeiro valor será obtido simplificando o fator comum $x - 2$.

2. SENTIDO DA VARIAÇÃO. MÁXIMOS E MÍNIMOS. Consideremos a derivada de primeira ordem, tomando a função já simplificada:

$$y' = \frac{(2x+1)3 - (3x-1)2}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2}$$

Como essa derivada é sempre positiva e nunca nula, a função é crescente nos dois intervalos em que é definida, não tem máximo nem mínimo, e a descontinuidade se passa de $+\infty$ para $-\infty$.

3. POLOS. A função tem um único polo para $x = -0,5$.

4. DETERMINAÇÃO DOS ZEROS. INTERSEÇÃO COM O EIXO $x'x$.

O único valor de x que anula apenas o numerador é $\frac{1}{3}$. Assim a função é nula para $x = \frac{1}{3}$, ponto em que o gráfico corta o eixo $x'x$ (ponto G).

5. LIMITE QUANDO $x \rightarrow \pm \infty$. Como o numerador e o denominador são do mesmo grau, o limite será a razão entre os coeficientes dos termos de maior grau isto é:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = \frac{3}{2} = 1,5.$$

6. RESUMO DA VARIAÇÃO. GRÁFICO. A variação pode ser resumida no seguinte quadro:

x	$-\infty \dots -10$	-5	-3	-2	-1	$-0,5$	$-1/3$	0	$1/3$	1	2	$3 \dots$	$+\infty$		
y'															
y	$1,5$	$1,6$	$1,78$	2	$2,3$	$4 \dots$	$+\infty$	$-\infty \dots$	-5	-1	0	$0,67$	1	$1,14 \dots$	$1,5$

7. GRÁFICO.

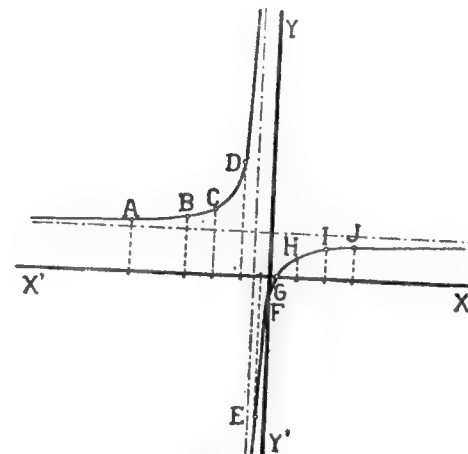


Fig. 41-a

EXERCÍCIOS

Estudar o sentido de variação das funções:

1. $y = x^3 - 27x$ no ponto $x = 4$ Resp.: Crescente
2. $y = 3x^2 - 12x + 1$ Resp.: Decrescente para $x < 2$. Crescente para $x > 2$
3. $y = x^3 - 5x^2 + 11x - 7$ Resp.: Crescente para todos os valores de x
4. $y = e^x \cdot x$ no ponto $x = 1$ Resp.: Crescente
5. $y = \operatorname{tg} x$ Resp.: Sempre crescente
6. $y = e^{(x^2+2x)}$ no ponto $x = 1$ Resp.: Crescente
7. $y = \frac{x-1}{x-3}$ Resp.: Decrescente para todo x

Calcular os máximos e os mínimos das funções:

8. $y = x^2 + 3x - 4$ Resp.: Mínimo em $x = -1,5$
9. $y = x^4 - 4x + 7$ Resp.: Mínimo em $x = 1$, $y = 4$
10. $y = \frac{x^2}{5+x^2}$ Resp.: Mínimo para $x = 0$
11. $y = x + \frac{1}{x}$ Resp.: Máx. em $x = -1$ e mín. em $x = 1$
12. $f(x) = x \cdot \ln x - 2x$ Resp.: Máximo: $x = e$, $y = -e$
13. $y = \sin x \cdot \cos x$ Resp.: Máx. $\left(k\pi + \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$; mín. $\left(k\pi - \frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

Estudar a variação e traçar o gráfico de:

14. $y = \frac{2}{x}$
15. $y = x^2 - 3x + 2$
16. $y = -3x^2 + x + 14$
17. $y = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$ (Woods et Bailey, pág. 148)
Resp.: Máximo: $x = \frac{4}{3}$
18. $y = \sqrt{\frac{3x^2+3x+2}{x^2-1}}$ Resp.: Domínio: $(-\infty, -1), (1, +\infty)$
Mínimo para $x = -3$

19. $y = \frac{6x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 1}$ (E.N.E. — 1936)
20. $y = \frac{3x^2 - 7x + 2}{2x^2 - 3x - 2}$ (E. Naval — 1939)
21. $y = x + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ (E. Militar — 1934)
22. $y = \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 4x + 4}$ (E. Naval — 1944)
23. Quais as dimensões que deve ter um retângulo de modo que a área tenha 36m² e o perímetro seja o menor possível?
Resp.: Quadrado de lado 6m
24. Qual a área máxima de um retângulo que tem 24m de perímetro?
Resp.: 36m² (quadrado)
25. Qual a área máxima do retângulo inscrito num triângulo isósceles de altura 8m e base 6m, estando a base do retângulo sobre a base do triângulo?
Resp.: 12m²
26. Um cone de revolução tem 6cm de altura e 3cm de raio. Calcular a altura e o raio do cilindro de revolução de volume máximo que se pode inscrever neste cone.
Resp.: $r = h = 2\text{cm}$
27. Achar a altura do cone de volume máximo inscrito na esfera, cujo raio tem o comprimento de 3cm.
Resp.: $h = 4\text{cm}$
28. Um prisma quadrangular regular tem 24m² de área total. Calcular a aresta da base e a altura, de modo que o volume do prisma seja máximo.
Resp.: $l = h = 2\text{m}$ (cubo)

funções primitivas . integral

7.1 - Funções primitivas. Dada a função $f(x) = x^2$ a derivada será $f'(x) = 2x$

Inversamente, dada a derivada

$$f'(x) = 2x$$

a função

$$f(x) = x^2$$

denomina-se **primitiva** da função dada.

Assim :

Primitiva de uma função $f(x)$ é uma segunda função, cuja derivada é $f(x)$.

Analogamente, se $2x dx$ é a diferencial de x^2 , x^2 denomina-se **integral** de $2x dx$.

O processo de cálculo que permite achar uma função partindo de sua diferencial denomina-se **integração** e é indicado com o símbolo $\int$, que é uma forma modificada da letra S, inicial de **soma**.

O resultado é a **integral**. Assim, se tivermos :

$$(1) \quad \int f(x) dx = F(x)$$

$F(x)$ será uma função, cuja derivada é $f(x)$.

Nos casos simples, a integral ou a primitiva obtêm-se imediatamente invertendo as fórmulas de derivação do número 5.12. Estas fórmulas invertidas denominam-se, por isso, **primitivas imediatas**.

Exemplo :

$$\int \cos x . dx = \text{sen } x \quad \text{porque : } D . \text{sen } x = \cos x$$

● A **integração** é a operação *inversa* da **diferenciação**.

7.2 - Constante de integração. Integral indefinida. Consideremos as diferenciais seguintes :

$$d . x^2 = 2x dx$$

$$d (x^2 + 1) = 2x dx$$

$$d (x^2 - 7) = 2x dx$$

e, de modo geral, sendo C uma *constante arbitrária* :

$$d (x^2 + C) = 2x dx$$

Uma diferencial dada tem, portanto, uma infinidade de integrais que diferem por uma quantidade constante, denominada **constante de integração** e podemos, apenas, escrever :

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

E, de modo geral :

$$\int f'(x) . dx = f(x) + C$$

Por esta razão, as integrais que até agora apresentamos, denominam-se **integrais indefinidas**.

Exemplos (vide parágrafo 5.12) :

$$1.º) \quad \int \sec^2 x . dx = \text{tg } x + C$$

$$\text{porque } d (\text{tg } x + C) = \sec^2 x dx$$

$$2.º) \int 5x^2 dx = \frac{5}{3} x^3 + C$$

$$\text{porque } d\left(\frac{5}{3} x^3 + C\right) = \frac{5}{3} \cdot 3x^2 dx = 5x^2 dx$$

OBSERVAÇÃO: Em certos problemas, a constante de integração fica determinada mediante condições estabelecidas no enunciado.

Exemplo: Achar a equação da curva que passa no ponto $(-1, 4)$ e cujo coeficiente angular da tangente em qualquer de seus pontos é o dobro da abscissa do mesmo ponto.

Resolução. Seja $y = f(x)$ a equação procurada.

O coeficiente angular da tangente é a derivada; logo, temos, pelo enunciado:

$$f'(x) = 2x$$

A função procurada é a primitiva de $f'(x)$; assim:

$$(1) \quad \int f'(x) dx = \int 2x dx = x^2 + C$$

Visto como $d(x^2 + C) = 2x dx$.

Da igualdade (1), conclui-se:

$$(2) \quad f(x) = y = x^2 + C$$

que é a equação de todas as curvas cujo coeficiente angular da tangente em qualquer ponto é $2x$.

Como a curva pedida passa no ponto $(-1, 4)$, as coordenadas deste satisfarão a equação (2), e teremos:

$$4 = 1 + C \quad \therefore C = 3$$

Substituindo o valor de C na (2), obtemos a equação procurada:

$$y = x^2 + 3$$

7.3 - Propriedades elementares da integral.

Primeira.

Em virtude das regras de derivação de um produto (5.7, VI), temos:

$$D[af(x) + C] = af'(x)$$

Logo, podemos concluir:

$$(1) \quad \int af'(x) dx = af(x) + C$$

e, por outro lado:

$$(2) \quad a \int f'(x) dx = a[f(x) + C] = af(x) + a \cdot C$$

Como a constante de integração é arbitrária, as expressões

(1) e (2) são equivalentes, isto é:

$$\int af'(x) dx = a \int f'(x) dx$$

Conclui-se:

Quando se passa um fator constante, para fora ou para dentro do sinal de integração, a integral não se altera.

Exemplos:

$$1. \quad \int 3dx = 3 \int dx = 3x + C$$

$$2. \quad \int \cos 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \int 2 \cos 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

Segunda.

A integral de uma soma é igual à soma das integrais das parcelas.

Sabemos que

$$D(u + v - w) = u' + v' - w'$$

onde u , v e w são funções de uma mesma variável x .

Logo, podemos concluir:

$$(1) \quad \int (u' + v' - w') dx = u + v - w + C$$

Por outro lado, temos:

$$\int u' dx + \int v' dx - \int w' dx = (u+c_1) + (v+c_2) - (w+c_3) \\ = u + v - w + (c_1+c_2-c_3)$$

ou, fazendo $c_1 + c_2 - c_3 = C$

$$(2) \quad \int u' dx + \int v' dx - \int w' dx = u + v - w + C$$

Comparando as igualdades (1) e (2):

$$\boxed{\int (u' + v' - w') dx = \int u' dx + \int v' dx - \int w' dx}$$

Exemplos:

1. $\int (1 + \sec^2 x) dx = \int dx + \int \sec^2 x dx = x + \operatorname{tg} x + C$
2. $\int (x^3 - 5x^2 + 6x + 1) dx = \int x^3 dx - \int 5x^2 dx + \int 6x dx + \int dx$
3. $\int (\cos x - \operatorname{sen} x) dx = \int \cos x dx - \int \operatorname{sen} x dx = \operatorname{sen} x + \cos x + c$

7.4 - Integral de monômios e polinômios.

7.4-1) *Integral de monômio*: $ax^n dx$. Temos, pela primeira regra:

$$\int ax^n dx = a \int x^n dx = a \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\text{visto como } D \cdot a \frac{x^{n+1}}{n+1} = a \cdot (n+1) \cdot \frac{x^n}{n+1} = ax^n$$

Conclui-se a fórmula da integral do monômio:

$$\boxed{\int ax^n = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C}$$

$$(n \neq -1)$$

Exemplos:

$$1. \int 5x^3 dx = \frac{5}{4} \cdot x^4 + C$$

$$2. \int \frac{3}{4} x^2 \cdot dx = \frac{3}{4 \cdot 3} x^3 + C = \frac{1}{4} x^3 + C$$

$$3. \int 5 dx = \int 5x^0 \cdot dx = 5x + C \quad 4. \int 0 \cdot dx = C$$

7.4-2) *Integral de polinômio*. A integral obtém-se pela segunda regra (da soma) e pela fórmula do monômio.

Exemplo:

$$\int (3x^2 - 4x + 8) dx = \int 3x^2 dx - \int 4x dx + \int 8 dx \\ = \frac{3}{3} x^3 - \frac{4}{2} x^2 + \frac{8}{1} x + C \\ = x^3 - 2x^2 + 8x + C$$

7.5 - Integral definida. Cálculo de áreas. Seja

$$y = f(x)$$

a equação da curva AB da figura 42.

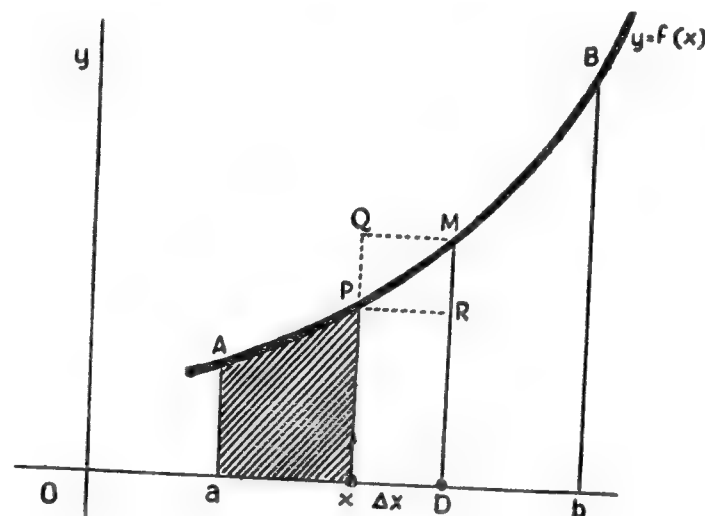


Fig. 42

Consideremos os pontos A e B sobre a curva, de abscissas a e b e tomemos um ponto arbitrário P , entre A e B , de abscissa variável x . Tracemos a ordenada $Px = f(x)$ e seja s a área da figura $APxa$, que se vê hachurada.

Atribuindo à variável um acréscimo Δx , a área sofrerá um acréscimo Δs , representado por $PMDx$. Este acréscimo Δs é maior que o retângulo $PRDx$ e menor que $QMDx$. Calculando as áreas desses retângulos podemos, então, escrever:

$$f(x) \cdot \Delta x < \Delta s < f(x + \Delta x) \cdot \Delta x$$

Dividindo por Δx :

$$f(x) < \frac{\Delta s}{\Delta x} < f(x + \Delta x)$$

Se Δx tender para zero, $f(x + \Delta x)$ tenderá para $f(x)$; logo, a última desigualdade permite concluir:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = f(x) \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{dx} = f(x)$$

Passando à diferencial:

$$ds = f(x) \cdot dx$$

Integrando os dois membros:

$$(1) \quad s = \int f(x) \cdot dx = F(x) + C$$

onde $F(x)$ é a função, cuja derivada é $f(x)$.

Quando $x = a$, teremos $s = 0$ pois a figura $APxa$ reduz-se à ordenada Aa ; assim, temos:

$$F(a) + C = 0 \quad \therefore \quad C = -F(a)$$

e a última igualdade (1), será:

$$s = F(x) - F(a)$$

Para calcular a área $ABba$, basta, portanto, fazer $x = b$ na última expressão da área e teremos:

$$S_{ABba} = F(b) - f(a)$$

Conclui-se:

A área limitada por uma curva, as ordenadas de dois de seus pontos e o eixo dos x pode ser calculada por intermédio da integral.

Esta integral representa-se com o símbolo:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

(lê-se: *integral entre os limites a e b de $f(x) dx$*) e denomina-se **integral definida** por não apresentar *constantes indeterminadas*.

A diferença entre os valores numéricos da função integral $F(x)$, isto é, $F(b) - F(a)$, representa-se, também, pelo símbolo:

$$[F(x)]_a^b \quad \text{e escreve-se} \quad \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

Exemplos:

1.º) Calcular a área limitada pela curva de equação $y = x^2$, o eixo dos x , e as ordenadas de $x = 0$ e $x = 3$.

Resolução. Temos:

$$S = \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9 - 0 = 9$$

2.º) Calcular a área limitada pela curva $y = \cos x$, o eixo dos x , e as ordenadas $x = \pi/2$ e $x = \pi$.

Resolução. Temos:

$$S = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx = \left[\sin x \right]_{\pi/2}^{\pi}$$

ou

$$S = \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} = -1$$

A área aparece negativa por estar situada *abaixo* do eixo dos x (fig. 43).

Considera-se, então, o *valor absoluto* e conclui-se:

$$S = 1$$

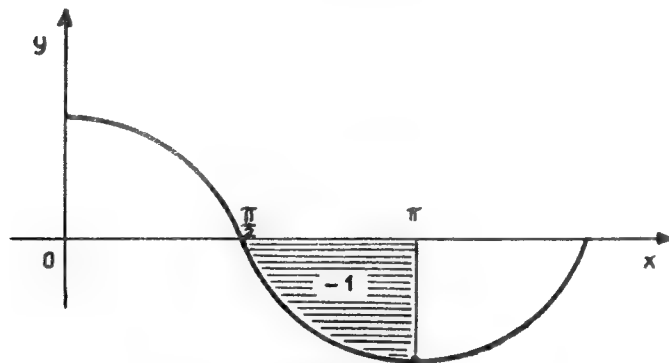


Fig. 43

OBSERVAÇÃO: Quando a área a calcular tiver uma parte situada *abaixo* do eixo dos x deve-se calculá-la separadamente e adicionar seu *valor absoluto* às partes situadas *acima* daquele eixo.

Para que isto ocorra, a curva $y = f(x)$ deve cortar o eixo dos x .

Exemplo: A curva $y = x^2 - 9$ corta o eixo dos x nos pontos: $x_1 = -3$ e $x_2 = 3$. Assim, a área dada por

$$\int_{-3}^3 (x^2 - 9) dx$$

é negativa e deve ser considerada em valor absoluto.

EXERCÍCIOS

Achar as integrais indefinidas ou as primitivas de:

- | | | | |
|--------------------------------|------------------------------------|--------------------------|-------------------------------|
| 1. $f'(x) = 3x^2$ | Resp.: $x^3 + C$ | 4. $12x^5 dx$ | Resp.: $2x^6 + C$ |
| 2. $f'(x) = 5x^3$ | Resp.: $\frac{5}{4} x^4 + C$ | 5. $x^{-3} dx$ | Resp.: $-\frac{1}{2x^2} + C$ |
| 3. $6x^2 dx$ | Resp.: $2x^3 + C$ | 6. $4x^{\frac{1}{3}} dx$ | Resp.: $3x^{\frac{4}{3}} + C$ |
| 7. $(4x^3 - 6x^2 + 2x + 7) dx$ | Resp.: $x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x + C$ | | |

8. $(5x^2 - 7x + 5) dx$

Resp.: $\frac{5}{3} x^3 - \frac{7}{2} x^2 + 5x + C$

9. $\sqrt{x} \cdot dx$

Resp.: $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$

10. $\frac{dx}{x}$

Resp.: $\ln x + C$

11. $\frac{dx}{x+1}$

Resp.: $\ln(x+1) + C$

12. $e^x dx$

Resp.: $e^x + C$

13. $\frac{2x dx}{x^2 + 1}$

Resp.: $\ln(x^2 + 1) + C$

14. $\frac{dx}{x^2 + 1}$

Resp.: $\arctan x + C$

15. $\sin x \cdot dx$

Resp.: $-\cos x + C$

16. $\sec^2 x dx$

Resp.: $\tan x$

17. $4 \sec^2(2x) dx$

Resp.: $2 \tan 2x + C$

18. $4 \sec^2(4x) dx$

Resp.: $\tan 4x + C$

19. Achar a equação da curva que passa no ponto $(-2, 3)$ e cujo coeficiente angular da tangente em qualquer de seus pontos é o *dôbro* da abscissa do mesmo ponto?

Resp.: $y = x^2 - 1$

20. Achar a equação da família de curvas para as quais o coeficiente angular da tangente em um ponto de abscissa x é $2x - 1$.

Resp.: $y = x^2 - x + C$

21. Achar a equação da curva $y = f(x)$ que passa no ponto $(2, 1)$ e para a qual se tem $f'(x) = 2x$.

Resp.: $x^2 - y - 3 = 0$

Calcular as integrais definidas:

22. $\int_0^2 3x^2 dx$

Resp.: 8

23. $\int_1^3 (4x + 5) dx$

Resp.: 26

24. $\int_2^4 (3x^2 - 6x + 1) dx$

Resp.: 22

25. $\int_1^3 \frac{dx}{x}$

Resp.: 13

26. $\int_{-1}^4 (x^2 - 6x) dx$

Resp.: $-\frac{70}{3}$

27. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx$

Resp.: -1

28. $\int_0^1 e^x dx$

Resp.: 1,718

29. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin x dx$

Resp.: -1

30. $\int_1^2 \sqrt{x} \cdot dx$

Resp.: 1,218

31. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} 4 \sec^2(2x) dx$

Resp.: 2

32. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (x^5 - 4x^3 + 2x) dx$

Resp.: $-\frac{5}{6}$

Calcular a área compreendida entre cada uma das curvas seguintes e as ordenadas dos pontos dados:

32. $y = x^2 + 5$ de $x = 2$ a $x = 4$ Resp.: $\frac{86}{3}$

33. $y = x + 1$ de $x = 0$ a $x = 4$ Resp.: 12

34. $y = x^2 - 3x + 2$ de $x = -1$ a $x = 3$ Resp.: $\frac{17}{3}$

35. $y = x^3$ de $x = 0$ a $x = 3$ Resp.: $\frac{81}{4}$

8

números complexos

8.1 – Imaginário puro. Unidade imaginária. Verificamos, no estudo das raízes, que as raízes de índice par dos números negativos não tinham sentido. Assim, $\sqrt{-9}$, não seria nem +3, nem -3, visto como

$$(\pm 3)^2 = +9$$

Há, em consequência, para dar-lhes sentido, necessidade de uma *ampliação* do conjunto numérico. Para isto consideremos as transformações

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9(-1)} = \sqrt{9} \times \sqrt{-1} = 3 \sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16(-1)} = \sqrt{16} \times \sqrt{-1} = 4 \sqrt{-1}$$

De um modo geral, a raiz quadrada de um número negativo pode ser escrita com a forma

$$a \sqrt{-1}$$

Aceitemos, então, o símbolo $\sqrt{-1}$ como sendo efetivamente um número que se representa por i e denomina-se *unidade imaginária*, formando-se com ela o conjunto dos *imaginários puros*:

$$\dots, -3i, -2i, -i, 0, i, 2i, 3i, \dots$$

Em oposição, os números até agora conhecidos como 3, -2, $\sqrt{5}$, π , etc., denominam-se *reais*.

A unidade imaginária é definida pela condição

$$i^2 = -1$$

isto é, o número cujo quadrado é -1 .

Assim, temos:

$$\sqrt{-4} = \pm 2i \text{ porque } (\pm 2i)^2 = 4i^2 = 4(-1) = -4$$

8.2 — Potências da unidade imaginária. Considerando extensivas à unidade imaginária as convenções das potências de expoente zero e um, isto é:

$$i^0 = 1 \quad i^1 = i$$

e, por definição: $i^2 = -1$

formemos pela recorrência

$$i^{p+1} = i^p \times i \quad (p = 2, 3, \dots)$$

as potências seguintes. Teremos

$$i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$$

$$i^4 = i^3 \times i = -i^2 = +1$$

$$i^5 = i^4 \times i = i$$

$$i^6 = i^5 \times i = i^2 = -1$$

$$i^7 = i^6 \times i = -1 \times i = -i$$

Observa-se que, a partir do expoente um, os valores das potências repetem-se periodicamente, de quatro em quatro, na ordem:

$$i, -1, -i, +1$$

Conclui-se:

Para achar uma potência qualquer de i dividiremos o expoente por 4 e a potência será igual a que tiver o resto para expoente.

Exemplos:

$$i^{247} = i^{4 \times 61 + 3} = i^3 = -i$$

$$i^{86} = i^2 = -1$$

De modo geral, sendo n inteiro e positivo, teremos:

$$i^{4n} = +1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i$$

8.3 — Números complexos. A soma $a + bi$ de um número real com um imaginário puro denomina-se **número complexo**.

Os números a e b chamam-se *componentes reais* do número complexo.

Os números complexos abrangem todos os conjuntos numéricos. De fato, sendo $a + bi$ sua forma geral, para $a=0$ temos todos os *imaginários puros* e, para $b=0$, todos os *reais*.

8.4 — Condições de igualdade e nulidade.

1.ª) *Postulado da igualdade.* Dois complexos são iguais quando as componentes reais são respectivamente iguais.

Exemplo:

$$\text{De } x + y + xyi = 5 + 6i$$

$$\text{conclui-se: } x + y = 5 \text{ e } xy = 6$$

2.ª) *Postulado da nulidade.* Um complexo é nulo quando as componentes reais são ambas nulas.

Exemplo:

$$\text{De } a + bi = 0$$

$$\text{conclui-se: } a = 0 \text{ e } b = 0$$

8.5 — Módulo e norma. *Módulo* de um complexo $a + bi$ é o valor aritmético do radical

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

representa-se pelo símbolo $|a + bi|$. Assim:

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad |3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Norma de um complexo $a + bi$ é o número:

$$a^2 + b^2$$

isto é, o *quadrado do módulo*.

OBSERVAÇÃO: Não têm sentido para os complexos as relações $>$ e $<$. Renuncia-se, dê-se modo, a qualquer ordenação dos números complexos.

8.6 - Complexos conjugados e opostos. Dois complexos como, por exemplo,

$$5 + 12i \text{ e } 5 - 12i$$

que diferem apenas no sinal da parcela imaginária, denominam-se **complexos conjugados**.

O conjugado de $-3 - 6i$ é $-3 + 6i$.

Dado o complexo $a + bi$, chama-se **oposto** o complexo $-a - bi$ que tem as duas componentes com o sinal contrário.

O oposto de $-3 + 4i$ é $3 - 4i$.

Observe-se que os *módulos* e as *normas* de dois complexos conjugados ou opostos são iguais. Assim:

$$|5 + 12i| = |5 - 12i| = \sqrt{25 + 144} = 13$$

$$|-3 - 4i| = |3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

8.7 - Operações racionais. As operações racionais efetuam-se escrevendo os complexos com a forma $a + bi$ e aplicando, em seguida, as regras das operações com polinômios. Nos resultados, substituem-se as potências de i por seus valores e reduzem-se os termos semelhantes.

a) Adição e subtração.

1) Somar $7 - 3i$ com $-5 + 4i$.

Temos:

$$(7 - 3i) + (-5 + 4i) = 7 - 3i - 5 + 4i = 2 + i$$

2) Subtrair $-5 - \sqrt{-36}$ de $6 - \sqrt{-16}$.

$$\text{Temos: } -5 - \sqrt{-36} = -5 - 6i$$

$$6 - \sqrt{-16} = 6 - 4i$$

Logo, vem:

$$(6 - 4i) - (-5 - 6i) = 6 - 4i + 5 + 6i = 11 + 2i$$

$$3) (5 + 3i) + (5 - 3i) = 10$$

$$4) (5 + 3i) - (5 - 3i) = 6i$$

Observemos, com os dois últimos exemplos, que a soma de dois complexos conjugados é um número real, enquanto que a diferença é um imaginário puro.

b) Multiplicação.

1) Multiplicar $7 + i$ por $2 - 3i$.

$$\begin{aligned} \text{Temos: } (7 + i)(2 - 3i) &= 14 - 21i + 2i - 3i^2 \\ &= 14 - 21i + 2i + 3 \\ &= 17 - 19i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) (\sqrt{8} - \sqrt{-12})(\sqrt{2} + \sqrt{-3}) &= (\sqrt{8} - i\sqrt{12})(\sqrt{2} + i\sqrt{3}) \\ &= \sqrt{16} + i\sqrt{24} - i\sqrt{24} - i^2\sqrt{36} \\ &= 4 - 6i^2 = 4 + 6 = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) (3 + i)(2 + i)(4 - i) &= 24 + 14i - i^2 - i^3 \\ &= 24 + 14i + 1 + i \\ &= 25 + 15i \end{aligned}$$

CASO PARTICULAR.

O produto de dois complexos conjugados é igual ao quadrado do módulo comum:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

c) Divisão.

Seja dividir $a + bi$ por $c + di$ e representemos o quociente procurado por $x + yi$, isto é:

$$a + bi = (c + di) \cdot (x + yi)$$

Efetuada a multiplicação :

$$a + bi = (cx - dy) + (dx + cy) \cdot i$$

Em virtude da condição de igualdade de complexos os valores de x e y serão dados pelo sistema

$$\begin{cases} cx - dy = a \\ dx + cy = b \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \\ y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \end{cases}$$

Logo, o quociente procurado é:

$$(1) \quad (a + bi) : (c + di) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2} i$$

OBSERVAÇÃO : Indicando o quociente com forma de fração, isto é :

$$x + yi = \frac{a + bi}{c + di}$$

multipliquemos os dois termos pelo conjugado do denominador :

$$x + yi = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

O resultado obtido é o mesmo da igualdade (1). Na prática a divisão efetua-se desse modo.

Exemplo : Efetuar $(1 - 2i) : (-2 + i)$.

$$\begin{aligned} \text{Vem : } \frac{1 - 2i}{-2 + i} &= \frac{(1 - 2i)(-2 - i)}{(-2 + i)(-2 - i)} \\ &= \frac{-2 - i + 4i + 2i^2}{4 - i^2} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot i \end{aligned}$$

d) **Inverso de um complexo.**

O inverso do complexo $a + bi$ será :

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \quad (2)$$

Isto é, o inverso é igual ao conjugado dividido pela norma.

Exemplo :

O inverso de $1 + i$ é :

$$\frac{1 - i}{1 + i} = \frac{1 - i}{2} = 0,5 - 0,5i$$

CASO PARTICULAR.

O inverso do complexo de módulo 1 é seu conjugado. Pois, neste caso, $a^2 + b^2 = 1$ e teremos na (2) :

$$\frac{1}{a + bi} = a - bi$$

e) **Potenciação.**

A potência obtém-se, imediatamente, pela fórmula do binômio de Newton.

Exemplo :

$$\begin{aligned} (3 + i)^3 &= 3^3 + 3 \cdot 3^2 i + 3 \cdot 3i^2 + i^3 \\ &= 27 + 27i + 9i^2 + i^3 \\ &= 27 + 27i - 9 - i \end{aligned}$$

Assim :

$$(3 + i)^3 = 18 + 26i$$

8.8 - Representação geométrica. Consideremos o eixo $A'A$ (fig. 44) de origem 0, cujos pontos correspondem aos números reais.

Tracemos o círculo de centro 0 e raio b .

Teremos :

$$\overline{OB}^2 = OA \times OA'$$

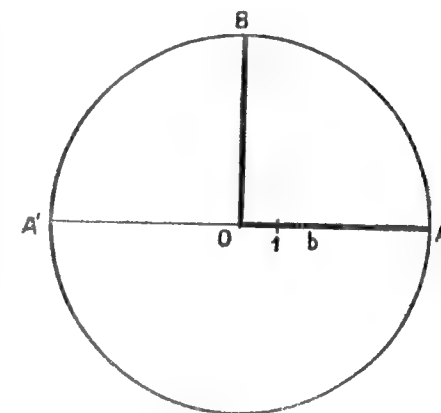


Fig. 44

Sendo $\overline{OA} = +b$, será $\overline{OA'} = -b$ e, portanto:

$$\overline{OB} = \sqrt{(+b)(-b)} = \sqrt{-b^2} = bi$$

Resulta, pois, que o segmento OB , perpendicular ao eixo dos números reais, forma-se da unidade i como OA de $+1$ e OA' de -1 .

Assim, o eixo das ordenadas pode chamar-se *eixo imaginário* e o das abscissas, *eixo real*. O número i pode ser considerado o símbolo numérico do *perpendicularismo*.

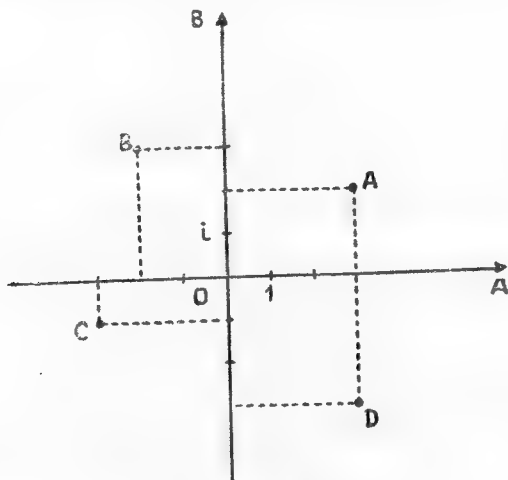


Fig. 45

Em virtude dessas considerações, um número complexo $a + bi$ define uma abscissa a e uma ordenada b e, portanto, ao número complexo $a + bi$ corresponde um ponto $P(a, b)$ do plano e reciprocamente. Por esta razão um número complexo, $3 + 4i$, por exemplo, representa-se também com a notação $(3, 4)$ e define-se:

Número complexo é um par ordenado de números reais.

O ponto do plano denomina-se *imagem* do número complexo e o número complexo denomina-se *afixo* do ponto.

Na figura 45, os pontos A, B, C, D são, respectivamente, imagens dos complexos:

$$3 + 2i, -2 + 3i, -3 - i, 3 - 3i$$

8.9 – Representação Trigonométrica. Argumento.
Seja P (fig. 43-a) a imagem do complexo $a + bi$.

Traçando OP , temos:

$$OP \text{ ou } \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Assim ρ representa o *módulo* do complexo.

O ângulo φ chama-se *argumento* do complexo e, de modo geral, será:

$$\varphi = 2k\pi + \varphi_0$$

sendo a menor determinação φ_0 — o *argumento principal*.

Do triângulo retângulo resulta:

$$a = \rho \cos \varphi$$

$$b = \rho \sin \varphi$$

que, substituídos no número complexo, dão:

$$a + bi = \rho \cos \varphi + i \rho \sin \varphi$$

ou

$$a + bi = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

que é a *forma trigonométrica* do número complexo e apresenta-se também por $\rho \operatorname{cis} \varphi$ ou $\rho | \varphi$.

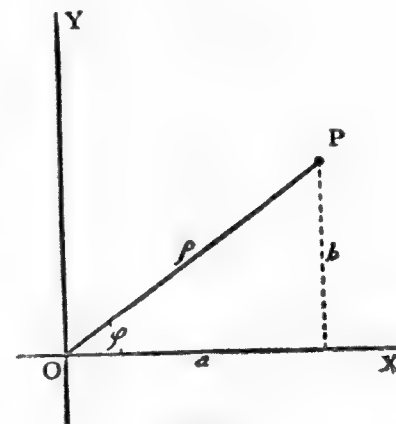


Fig. 43-a

EXERCÍCIOS

1. Calcular: $\sqrt{-169}$, $\sqrt{-49}$, $\sqrt{-144}$, i^7 , i^{15} , i^{38}

Resp.: $13i$, $7i$, $12i$, $-i$, i , -1

Efetuar as operações indicadas:

2. $(\sqrt{2} - \sqrt{-5}) \times \sqrt{-5}$ Resp.: $25 + \sqrt{-10}$

3. $(3 + \sqrt{-25})(-4 - \sqrt{-9})$ Resp.: $3 - 29i$

4. $(5 + 4i) - (3 - 2i)$ Resp.: $2 + 6i$

5. $(7 - 3i) + (2 + 5i) - (5 + 8i) - (3 - i)$ Resp.: $1 - 5i$

6. $(\sqrt{5} - \sqrt{-4}) + (\sqrt{20} + \sqrt{-16})$ Resp.: $3\sqrt{5} + 2i$

7. $(\sqrt{3} + 2\sqrt{-3})(\sqrt{3} - 2\sqrt{-3})$ Resp.: 15

8. $(5 + 2i)(5 - 2i)$ Resp.: 29

9. $(4 - 3i)(-1 + 5i)(7 - 2i)$ Resp.: $123 + 139i$

10. $\left(\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{2} \cdot i\right) \left(\sqrt{3} + \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i\right)$ Resp.: $2 - \frac{5\sqrt{6}}{6}i$

11. $(\sqrt{3} - \sqrt{-2})^2$ Resp.: $1 - 2\sqrt{6}i$

12. $(\sqrt{5} - \sqrt{3} \cdot i)^2$ Resp.: $2(1 - \sqrt{-15})$

13. $\frac{1}{5 - \sqrt{-6}}$ Resp.: $\frac{5 + \sqrt{6}i}{31}$

14. $\frac{3 + 2i}{\sqrt{-4}}$ Resp.: $1 - 1, 5i$

15. $\frac{5 - i}{1 + i} - \frac{4 - 3i}{2 + i}$ Resp.: $1 - i$

16. $\frac{3 + 5\sqrt{-1}}{4 - 2\sqrt{-1}}$ Resp.: $0, 1 + 1, 3i$

17. $\frac{3}{1 + i} - \frac{5}{1 - i} + \frac{4}{1 - i}$ Resp.: $1 - 2i$

18. $\frac{1 + i}{1 + 2i} + \frac{1 - i}{1 - 2i}$ Resp.: $1 \frac{1}{5}$

19. $(2 + i)^6$ Resp.: $-38 + 41 \cdot i$

20. Calcular: $\frac{a^2 + b}{3a}$ para $a = 2 + i$ e $b = 3 - i$ Resp.: 1

21. Calcular os módulos de: $-5 - 12i$, $6 + 8i$, $3 - 4i$, $\sqrt{7} + 3i$
Resp.: 13 , 10 , 5 , 4

22. Achar os valores de x e y para os quais se verificam as igualdades:
a) $3x + yi = y + 6 - 3i$ b) $7 + (x - y)i = 2x - 3y + 4i$
Resp.: a) $x = 1$, $y = -3$
b) $x = 5$, $y = 1$

23. Calcular: $\frac{1 - i}{1 + i} + \frac{1 + i}{1 - i}$ Resp.: 0

24. Achar x de modo que o produto $(4 + 3i)(x - 6i)$ seja um número real.
Resp.: $x = 8$

25. Achar x de modo que o quociente $\frac{x - i}{1 - 3i}$ seja um imaginário puro.
Achar esse imaginário.
Resp.: $x = -3$, $-i$

26. Verificar que o módulo do quociente de dois complexos conjugados é a unidade.

27. Resolver as equações: a) $x^2 - 4x + 13 = 0$ b) $5x^2 - 6x + 5 = 0$
Resp.: a) $2 \pm 3i$
b) $0,6 \pm 0,8i$

28. Resolver a equação $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ Resp.: $\pm 2i$, ± 3

29. Achar p e q de modo que $3i$ seja raiz da equação $x^3 + px^2 + qx + 3 = 0$
Resp.: $p = 1/3$ e $q = 9$

30. Um quadrado $ABCD$ está inscrito num círculo com centro na origem. O vértice A é imagem do complexo $3 + 4i$. Achar os afijos dos três vértices.
Resp.: $-4 + 3i$, $-3 - 4i$, $4 - 3i$.

31. Dar a forma trigonométrica dos complexos:

a) $1 + i$ b) $6 + 6\sqrt{3}i$ c) $3 + 4i$
Resp.: a) $\sqrt{2} \left[2k\pi = \frac{\pi}{4} \right]$ b) $12 \left[2k\pi + \frac{\pi}{3} \right]$ c) $5 \left[\arcsen \frac{4}{5} \right]$

9

polinômios . identidade divisão por $x - a$. fórmula de Taylor

9.1 - Polinômios de uma variável. Uma expressão racional, inteira, da forma

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m$$

onde m é um inteiro não negativo e

$A_0, A_1, \dots, A_{m-1}, A_m$ são números reais dados, com $A_0 \neq 0$, e x pode receber um valor qualquer chama-se *polinômio de uma variável* ou *polinômio em x* .

Representa-lo-emos abreviadamente pela notação $P(x)$.

A cada valor x_1 de x corresponde um valor numérico determinado, $P(x_1)$, para o polinômio; assim, o polinômio é uma *função unívoca* da variável x .

Exemplo:

O valor numérico do polinômio

$$P(x) = 3x^2 - 8x - 3$$

para $x = 3$ é:

$$P(3) = 27 - 24 - 3 = 0$$

9.2 - Raízes ou zeros de um polinômio. Como associada ao polinômio $P(x)$ de grau $m \geq 1$, considera-se a equação

$$P(x) = 0$$

de grau m .

Todo valor a de x para o qual é nulo o polinômio $P(x)$, isto é, o número a que verifica a condição

$$P(a) = 0$$

chama-se *raiz* da equação $P(x) = 0$ e, também, *raiz* ou *zero* do polinômio $P(x)$.

Assim, o número 3 é *raiz* ou *zero* do polinômio $3x^2 - 8x - 3$, porque $P(3) = 0$, como vimos acima.

9.3 - Polinômio idênticamente nulo. Diz-se que um polinômio inteiro em x é *idênticamente nulo* e escreve-se

$$P(x) \equiv 0$$

quando seu valor numérico é zero, qualquer que seja o valor atribuído a x .

9.4 - Polinômios idênticos. Dois polinômios inteiros em x são *idênticos*, quando seus valores numéricos são iguais, para qualquer valor atribuído a x .

Representa-se a identidade de dois polinômios $P(x)$ e $P'(x)$ escrevendo-se:

$$P(x) \equiv P'(x)$$

9.5 - Condições de identidade.

Primeira.

A condição necessária e suficiente para que um polinômio seja idênticamente nulo é que tenha todos os coeficientes nulos.

Demonstração.

Seja o polinômio

$$P(x) = A_1x^m + A_2x^{m-1} + A_3x^{m-2} + \dots + A_mx + A_{m+1}$$

a) *A condição é suficiente.*

Realmente, admitida a hipótese:

$$A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = 0 \dots A_m = 0, A_{m+1} = 0$$

qualquer que seja o valor atribuído a x , todos os termos serão nulos, por terem o fator zero, e a soma será também nula.

b) A condição é necessária.

Admitida a hipótese:

$$A_1x^m + A_2x^{m-1} + A_3x^{m-2} + \dots + A_mx + A_{m+1} \equiv 0$$

para qualquer valor de x o polinômio terá valor numérico nulo, logo, se substituirmos x por zero, a igualdade verificar-se-á, e como neste caso o polinômio reduz-se ao último termo, conclui-se:

$$A_{m+1} = 0$$

Assim, o polinômio pode ser escrito:

$$A_1x^m + A_2x^{m-1} + A_3x^{m-2} + \dots + A_mx \equiv 0$$

ou, colocando x em evidência:

$$x(A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \dots + A_m) \equiv 0$$

Se este produto é sempre nulo, um dos fatores será nulo, e como o fator x pode ter um valor arbitrário, conclui-se que o fator sempre nulo é o segundo, isto é:

$$A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \dots + A_m \equiv 0$$

Repetindo o raciocínio anterior, concluiremos:

$$A_m = 0$$

e assim, sucessivamente, até o termo A_1 o que demonstra ser a condição necessária, isto é, o polinômio não pode ser idênticamente nulo sem que a condição seja preenchida.

Segunda.

A condição necessária e suficiente para que dois polinômios inteiros em x sejam idênticos é que os coeficientes dos termos semelhantes sejam iguais.

Demonstração.

Suponhamos os polinômios idênticos:

$$\begin{aligned} A_1x^m + A_2x^{m-1} + A_3x^{m-2} + \dots + A_mx + A_{m+1} &\equiv \\ &\equiv B_1x^m + B_2x^{m-1} + B_3x^{m-2} + \dots + B_mx + B_{m+1} \end{aligned}$$

Transpondo todos os termos para o primeiro membro, resulta:

$$(A_1 - B_1)x^m + (A_2 - B_2)x^{m-1} + (A_3 - B_3)x^{m-2} + \dots + (A_m - B_m)x + (A_{m+1} - B_{m+1}) \equiv 0$$

Como o último polinômio é idênticamente nulo, conclui-se o sistema:

$$\begin{aligned} A_1 - B_1 &= 0 \quad \therefore \quad A_1 = B_1 \\ A_2 - B_2 &= 0 \quad \therefore \quad A_2 = B_2 \\ A_3 - B_3 &= 0 \quad \therefore \quad A_3 = B_3 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ A_m - B_m &= 0 \quad \therefore \quad A_m = B_m \\ A_{m+1} - B_{m+1} &= 0 \quad \therefore \quad A_{m+1} = B_{m+1} \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO: Se os polinômios forem de graus diferentes os termos do de maior grau, sem correspondentes no segundo, terão coeficientes nulos.

Exemplo: Da identidade $ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv 3x^2 + 5x + 6$, conclui-se:

$$a = 0, \quad b = 3, \quad c = 5, \quad d = 6$$

9.6 - Método dos coeficientes a determinar. O método dos coeficientes a determinar, idealizado por Descartes, é uma aplicação imediata da identidade de polinômios.

Sempre que uma questão consiste em determinar certos polinômios, cujos graus são conhecidos, e é possível traduzí-la por uma identidade, representaremos por letras os coeficientes do polinômio procurado e, aplicando as condições de identidade, concluiremos um sistema de equações, que permitirá determinar os coeficientes incógnitos.

Exemplos:

1.º) Achar o quociente e o resto da divisão

$$(2x^4 - 3x^2 + 7) : (x^2 - 5)$$

o quociente será um polinômio do segundo grau da forma $ax^2 + bx + c$ e o resto, do primeiro grau, por ser de grau menor que o divisor, será da forma $mx + p$.

Assim, temos:

$$2x^4 - 3x^2 + 7 \equiv (x^2 - 5)(ax^2 + bx + c) + mx + p$$

ou, efetuando as operações:

$$2x^4 - 3x^2 + 7 \equiv ax^4 + bx^3 + (c - 5a)x^2 + (m - 5b)x - 5c + p$$

Dai, o sistema de equações:

$$\begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b & = & 0 \\ c - 5a & = & -3 \quad \text{donde: } c = 7 \\ m - 5b & = & 0 \quad m = 0 \\ p - 5c & = & 7 \quad p = 42 \end{array}$$

Resulta:

$$Q(x) = 2x^2 + 7 \quad \text{e} \quad R = 42$$

2.º) Determinar p e q de modo que o polinômio $2x^3 - 5x^2 + px + q$ seja divisível por $x^2 - 3x + 2$.

Poderíamos usar, como no exemplo anterior, a identidade:

$$2x^3 - 5x^2 + px + q \equiv (x^2 - 3x + 2)(ax + b).$$

Efetuada a divisão, podemos também proceder como segue.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 5x^2 + px + q & x^2 - 3x + 2 \\ -2x^3 + 6x^2 - 4x & 2x + 1 \\ \hline x^2 + (p-4)x + q & \\ -x^2 + 3x & -2 \\ \hline (p-1)x + (q-2) & \end{array}$$

A condição de divisibilidade é: $(p-1)x + q - 2 \equiv 0$, donde:

$$p - 1 = 0$$

$$q - 2 = 0$$

e, portanto:

$$p = 1 \quad \text{e} \quad q = 2$$

3.º) Decompor a fração $\frac{3x+1}{x^2-5x+6}$ numa soma de frações com os denominadores do primeiro grau.

O denominador $x^2 - 5x + 6$ será o m.m.c. dos denominadores das parcelas procuradas.

Decompondo o denominador em fatores tem-se:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

A identidade será:

$$\frac{3x+1}{x^2-5x+6} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \quad (1)$$

Eliminando os denominadores:

$$3x+1 \equiv A(x-3) + B(x-2)$$

Podemos achar os coeficientes calculando os valores numéricos para os valores de x que anulam cada um dos binômios:

$$\text{Para } x=2, \text{ temos: } 7 = -A \quad \therefore A = -7$$

$$\text{Para } x=3, \text{ temos: } 10 = B \quad \therefore B = 10$$

Substituindo em (1):

$$\frac{3x+1}{x^2-5x+6} \equiv \frac{-7}{x-2} + \frac{10}{x-3}$$

4.º) Decompor a fração:

$$\frac{x^2+x+6}{(x+1)(x-2)^2}$$

O denominador $(x+1)(x-2)^2$ é o m.m.c. dos denominadores das parcelas, assim, a cada fator do 1.º grau repetido corresponde uma soma de frações parciais, cujos numeradores são constantes e cujos denominadores são as potências decrescentes do fator repetido.

$$\frac{x^2+x+6}{(x+1)(x-2)^2} \equiv \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} \quad (1)$$

donde, eliminando os denominadores:

$$x^2+x+6 \equiv A(x+1) + B(x+1)(x-2) + C(x-2)^2$$

$$\text{Para } x=2, \text{ temos: } 4+2+6 = 3A \quad \therefore A = 4$$

$$\text{Para } x=-1, \text{ temos: } 6 = 9C \quad \therefore C = \frac{2}{3}$$

$$\text{Para } x=0, \text{ vem: } 6 = A - 2B + 4C \quad \text{ou} \quad 6 = 4 - 2B + \frac{8}{3} \quad \therefore B = \frac{1}{3}$$

Substituindo em (1):

$$\frac{x^2+x+6}{(x+1)(x-2)^2} \equiv \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{1/3}{x-2} + \frac{2/3}{x+1}$$

EXERCÍCIOS

- Efetuar as divisões pelo método de Descartes:

1. $(6x^3 - x^2 - 9x + 4) : (2x^2 - 3x + 1)$

2. $(4x^4 - 13x^2 + 12x - 3) : (2x^2 - 3x + 1)$

3. $(x^5 + 12x^2 + 3x^4 - 16) : (x^2 + 3x - 4)$

4. $(9x^4 - 4x^3 + \frac{58}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 1) : (3x^2 - \frac{2}{3}x + 1)$

5. Utilizando o método de Descartes, extrair a raiz quadrada de $x^6 - 4x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 12x + 9$

6. Achar os valores de l, m, n que satisfazem a identidade: (E.M. — 1940)

$$5x^2 - 19x + 18 \equiv l(x-2)(x-3) + m(x-1)(x-3) + n(x-1)(x-2)$$

- Achar os valores de p e q , de modo que as seguintes divisões sejam exatas. Achar os quocientes:

7. $(8x^3 - 10x^2 + px + q) : (2x^2 - 3x + 2)$

8. $(3x^3 + px^2 - 7x + q) : (x^2 - 5x + 1)$

- Decompor em frações parciais:

9. $\frac{7x-2}{x^2-4}$

10. $\frac{5x-7}{x^2-2x-3}$

11. $\frac{x^3+1}{(x-1)^2(x+2)}$

12. Transformar $16x^2 - 16$ numa diferença de quadrados da forma $(x^2 + a)^2 - (x^2 + b)^2$.

13. Qual a relação que deve existir entre as componentes reais dos complexos $a+bi$ e $c+di$, para que o quociente seja real?

14. Achar a condição para que $ax^2 + bx + c$ seja quadrado.

15. Achar os polinômios do 4.º grau que verificam a identidade $P(x) \equiv P(1-x)$ (EPUSP — 1945).

9.7 — Divisão por $x-a$. Em virtude de suas aplicações à resolução das equações, é muito importante o caso

de divisão em que o divisor é um binômio de primeiro grau da forma $x-a$ ou $bx-a$. Em consequência, o resto (de grau menor que o divisor) será uma constante R e teremos a identidade:

$$P(x) \equiv (x-a) \cdot Q(x) + R \quad (1)$$

9.8 — Cálculo do resto: Teorema de D'Alembert.

O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x-a$ é o valor numérico do polinômio para $x=a$, isto é, $P(a)$.

Demonstração.

Substituindo x por a na identidade (1), resulta:

$$P(a) = (a-a) \cdot Q(a) + R$$

donde:

$$P(a) = R$$

Consequências.

1.ª Se a for raiz da equação $P(x) = 0$, o polinômio $P(x)$ terá o fator $x-a$. Porque, na hipótese:

$$P(a) = 0$$

e a identidade (1) fica: $P(x) \equiv (x-a) \cdot Q(x)$.

2.ª Se um polinômio $P(x)$ tiver o fator $x-a$, a será raiz de $P(x) = 0$. Porque, sendo $R = 0$, será

$$P(a) = 0$$

Estas duas consequências podem ser reunidas no importante TEOREMA DO FATOR:

A condição necessária e suficiente para que um polinômio inteiro em x tenha o fator $x-a$ é que a seja raiz da equação $P(x) = 0$, isto é: $P(a) = 0$.

Exemplos:

1.º O resto da divisão do polinômio $x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ por $x - 2$ é:

$$R = P(2) = 8 - 20 + 6 - 2 = -8$$

2.º Verificar se o polinômio $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ tem o fator $x - 3$.

$$\text{Temos: } P(3) = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$$

logo, o polinômio tem o fator $x - 3$.

9.9 - Leis de Ruffini. Formação do quociente e do resto. Seja achar o quociente e o resto da divisão por $x - a$ do polinômio

$$P(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_m$$

O quociente será um polinômio $Q(x)$, de grau $m - 1$:

$$Q(x) = B_0x^{m-1} + B_1x^{m-2} + B_2x^{m-3} + \dots + B_{m-1}$$

Teremos, em virtude da identidade (1):

$$\begin{aligned} A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_m &\equiv \\ &\equiv (x - a)(B_0x^{m-1} + B_1x^{m-2} + B_2x^{m-3} + \dots + B_{m-1}) + R \end{aligned}$$

Efetuada as operações

$$\begin{aligned} A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_m &\equiv \\ \equiv B_0x^m + (B_1 - aB_0)x^{m-1} + (B_2 - aB_1)x^{m-2} + \dots + R - aB_{m-1} \end{aligned}$$

Temos, então, o sistema:

$$\begin{cases} A_0 = B_0 \\ A_1 = B_1 - aB_0 \\ A_2 = B_2 - aB_1 \\ \dots \\ A_m = R - aB_{m-1} \end{cases} \quad \text{donde:} \quad \begin{cases} B_0 = A_0 \\ B_1 = aB_0 + A_1 \\ B_2 = aB_1 + A_2 \\ \dots \\ R = aB_{m-1} + A_m \end{cases} \quad (2)$$

As últimas igualdades (2) traduzem as leis de Ruffini para achar o quociente e o resto.

9.10 - Dispositivo prático. As operações indicadas nas igualdades (2) efetuam-se adotando o seguinte dispositivo prático, conhecido por ALGORITMO DE BRIOT, de fácil compreensão:

Coeficientes do dividendo.....	A_0	A_1	A_2	$\dots$	A_m
Coeficientes do quociente por a	aB_0	aB_1	$\dots$	aB_{m-1}	
Coeficientes do quociente (soma)	B_0	B_1	B_2	$\dots$	R

Exemplo:

Achar o quociente e o resto da divisão:

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x - 2)$$

Dispositivo prático:

Coeficientes do dividendo.....	1	+2	-5	-6
Coeficientes do quociente por 2		+2	8	6
Coeficientes do quociente.....	1	4	3	0 (resto)

$$\text{Temos: } Q(x) = x^2 + 4x + 3 \quad R = 0$$

Pode-se, com algum exercício, suprimir a segunda linha do dispositivo prático. Para obter o coeficiente 3 do quadro anterior, diríamos, apenas: $2 \times 4,8$ menos 5,3.

O dispositivo do exemplo, assim reduzido, será:

	1	+2	-5	-6
2	1	4	3	0

OBSERVAÇÕES:

1.ª A regra de Ruffini foi deduzida para um polinômio completo. Assim, é necessário incluir, com coeficientes nulos, os termos que nele não figurarem e ordenar o polinômio.

2.ª Para o divisor $x + a$ tomaremos $-a$ em lugar de a ; realmente o binômio pode escrever-se:

$$x + a = x - (-a)$$

Exemplos:

1.º Achar o quociente e o resto: $(x^5 - 3x^3 + 4x + 4) : (x + 3)$.

Dispositivo prático:

	1	0	-3	0	+4	+4
-3	1	-3	6	-18	58	-170

Temos:

$$Q(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 18x + 58, \quad R = -170$$

2.º) Calcular o valor numérico do polinômio $2x^3 + 4x^2 - 8x - 7$ para $x = -3$.

Resolução. O valor numérico $P(-3)$ é o resto da divisão por $x + 3$. Assim, podemos calculá-lo pelo dispositivo prático:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & +4 & -8 & -7 \\ -3 & 2 & -2 & -2 & -1 \end{array}$$

Temos:

$$P(-3) = -1$$

9.11 — Divisão pelo binômio $bx + a$. A identidade da divisão

$$P(x) \equiv (bx + a) \cdot Q(x) + R$$

pode, neste caso, ser escrita:

$$P(x) \equiv \left(x + \frac{a}{b}\right) \cdot [bQ(x)] + R$$

Assim, podemos aplicar o teorema do resto e o dispositivo de Ruffini-Briot para pesquisa do quociente e do resto, tendo o cuidado de dividir o quociente encontrado por b .

Exemplo:

Achar o quociente e o resto da divisão de $2x^4 + x^3 - 4x^2 + 5$ por $2x + 1$.

Resolução. Tomaremos o divisor $x + \frac{1}{2}$ e teremos o dispositivo:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & +1 & -4 & 0 & +5 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 0 & -4 & +2 & +4 \end{array}$$

O quociente deverá ser dividido por 2:

$$Q(x) = x^3 - 2x + 1$$

O resto é: $R = P\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$

9.12 — Desenvolvimento de um polinômio $P(x)$ segundo as potências de um binômio $x - a$. Este desen-

volvimento é importante por sua larga aplicação na resolução das equações de grau qualquer, como teremos oportunidade de verificar.

Dividindo o polinômio $P(x)$, de grau m , e os quocientes sucessivos por um binômio $x - h$, obteremos as identidades:

$$P(x) = (x - h) \cdot Q_1(x) + R_1$$

$$Q_1(x) = (x - h) \cdot Q_2(x) + R_2$$

$$Q_2(x) = (x - h) \cdot Q_3(x) + R_3$$

$$\dots\dots\dots$$

$$Q_{m-1}(x) \equiv (x - h) \cdot Q_m(x) + R_m$$

Os graus dos quocientes sucessivos diminuem de *uma unidade*; logo, $Q_m(x)$ é uma constante, correspondendo à última divisão.

Substituindo na primeira $Q_1(x)$ pelo valor dado na segunda, vem:

$$P(x) \equiv (x - h) [(x - h) \cdot Q_2(x) + R_2] + R_1$$

ou $P(x) \equiv (x - h)^2 \cdot Q_2(x) + R_2(x - h) + R_1$

Substituindo nesta última $Q_2(x)$ pelo valor dado na terceira:

$$P(x) \equiv (x - h)^2 \cdot [(x - h) \cdot Q_3(x) + R_3] + R_2(x - h) + R_1$$

ou $P(x) \equiv (x - h)^3 \cdot Q_3(x) + R_3(x - h)^2 + R_2(x - h) + R_1$

E assim, sucessivamente, chegaremos à substituição do quociente $Q_{m-1}(x)$, e obteremos:

$$(I) \quad P(x) \equiv (x - h)^m \cdot Q_m(x) + R_m(x - h)^{m-1} + \dots + R_2(x - h) + R_1$$

9.13 — Algoritmo de Ruffini-Horner. Nas aplicações numéricas da fórmula (I) os restos sucessivos $R_1, R_2, \dots, R_m$ e o quociente constante $Q_m(x)$ calculam-se aplicando o dispositivo prático da divisão por $x - a$.

Este processo de cálculo denomina-se *algoritmo de Ruffini-Horner*.

Exemplo :

Desenvolver o polinômio $x^3 - 5x^2 + 7x - 4$ segundo as potências de $x - 1$.

Temos as divisões sucessivas por $x - 1$ pelo algoritmo Ruffini-Horner :

$h = 1$	1	-5	7	-4	
	1	-4	3		$-1 = R_1$
	1	-3			$0 = R_2$
	1				$-2 = R_3$
	1				$1 = Q_3$

Logo, virá, de acôrdo com a fórmula (I):

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 4 = (x - 1)^3 - 2(x - 1)^2 - 1$$

9.14 - Fórmula de Taylor para os polinômios. Os coeficientes $R_1, R_2, R_3, \dots$, da fórmula (I), podem ser obtidos por intermédio dos valores numéricos do polinômio $P(x)$ e de suas derivadas sucessivas.

Seja

$$P(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_{m-1}x + A_m$$

Atribuindo à variável x um acréscimo h , a partir de x_0 , isto é:

$$x = x_0 + h \quad (1)$$

e desenvolvendo as potências de $x_0 + h$, vem:

$$\begin{aligned} P(x_0 + h) &= A_0 [x_0^m + mx_0^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{2!}h^2x_0^{m-2} + \dots + h^m] + \\ &+ A_1 [x_0^{m-1} + (m-1)hx_0^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2!}h^2x_0^{m-3} + \dots + h^{m-1}] + \\ &\dots + A_{m-1}(x_0 + h) + \\ &+ A_m \end{aligned}$$

Ordenando segundo as potências de h , isto é, pelas colunas:

$$\begin{aligned} P(x_0 + h) &= A_0x_0^m + A_1x_0^{m-1} + \dots + A_{m-1}x_0 + A_m + \\ &+ h [mA_0x_0^{m-1} + (m-1)A_1x_0^{m-2} + \dots + A_{m-1}] + \\ &+ \frac{h^2}{2!} [m(m-1)A_0x_0^{m-2} + (m-1)(m-2)A_1x_0^{m-3} + \dots + A_{m-2}] + \dots + \\ &+ A_0h^m \end{aligned}$$

A primeira linha é o valor numérico $P(x_0)$ e os colchetes das demais linhas são os valores numéricos das derivadas sucessivas; logo, podemos escrever:

$$(II) \quad P(x_0 + h) = P(x_0) + hP'(x_0) + \frac{h^2}{2!}P''(x_0) + \dots + \frac{h^m}{m!}P^{(m)}(x_0)$$

denominada **fórmula de Taylor para os polinômios**.

Se considerarmos a condição (1), $x = x_0 + h$, resulta:

$$h = x - x_0$$

e a fórmula de Taylor pode ser escrita:

$$(III) \quad P(x) = P(x_0) + (x - x_0)P'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}P''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^m}{m!}P^{(m)}(x_0)$$

Se compararmos as fórmulas (I) e (III), concluiremos imediatamente:

$$P(x_0) = R_1; \quad P'(x_0) = R_2; \quad \frac{P''(x_0)}{2!} = R_3, \text{ etc.}$$

Assim, os coeficientes da fórmula de Taylor, em qualquer das duas expressões, podem ser obtidos pelo algoritmo de Ruffini-Horner.

OBSERVAÇÃO : Na fórmula II podemos trocar x por h e h por x , qualquer que seja o valor x_0 . Assim a fórmula pode também ser escrita:

$$(II) \quad P(x + h) = P(h) + P'(h)x + \frac{P''(h)}{2!}x^2 + \dots + \frac{P^{(m)}(h)}{m!}x^m$$

Exemplos:

1.º Dado o polinômio $P(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x + 7$ achar o polinômio $P(x+2)$.

Resolução. De acôrdo com a expressão II da fórmula de Taylor, temos:

$$P(x+2) = P(2) + P'(2)x + \frac{P''(2)}{2!}x^2 + \frac{P'''(2)}{3!}x^3$$

Calculando os coeficientes pelo algoritmo:

2	4	-5	2	7
	4	+3	8	23
	4	11	30	
	4	19		
	4			

Conclui-se:

$$P(x+2) = 4x^3 + 19x^2 + 30x + 23$$

2.º Dado $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$, calcular $P(x-2)$.

Temos:

$$P(x-2) = P(-2) + P'(-2)x + \frac{P''(-2)}{2!}x^2 + \frac{P'''(-2)}{3!}x^3$$

Aplicando o algoritmo:

-2	2	-4	5	-1
	2	-8	21	-43
	2	-12	45	
	2	-16		
	2			

Conclui-se:

$$P(x-2) = 2x^3 - 16x^2 + 45x - 43$$

EXERCÍCIOS

Determinar o quociente e o resto das divisões:

- $(x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12) : (x-2)$ Resp.: $Q = x^3 - 7x - 6$; $R = 0$
- $(x^4 - 7x^2 + 12) : (x+3)$ Resp.: $Q = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$; $R = 30$
- $(3x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5x - 2) : (x+1)$ Resp.: $Q = 3x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 2$; $R = 0$
- $(2x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 3) : (x-2)$ Resp.: $Q = 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 6x + 12$; $R = 21$
- $(x^5 + 2x^4 - x^2 + 4) : (x+2)$ Resp.: $Q = x^4 - x + 2$; $R = 0$
- $(2x^4 + 6x^3 + 2x + 6) : (x+3)$ Resp.: $Q = 2x^3 + 2$; $R = 0$
- $(7x^3 + 96x^2 - 28x - 5) : (7x-2)$ Resp.: $Q = x^2 + 14x$; $R = -5$
- $(2x^3 - x^2 - 9 + 3x) : (2x-3)$ Resp.: $Q = x^2 + x + 3$; $R = 0$
- $(x^5 - 3bx^4 + 5b^2x^3 - 8b^3x^2 + 6b^4x - 4b^5) : (x-2b)$ Resp.: $x^4 - bx^3 + 3b^2x^2 - 2b^3x + 2b^4$; $R = 0$
- $(6a^4 - 19a^3 + 46a - 29) : (3a-5)$ Resp.: $Q = 2a^3 - 3a^2 - 5a + 7$; $R = 6$
- $(2xy^4 - x^2y^3 + 6x^3y^2 + y^5) : (3x+y)$ Resp.: $Q = y^4 - xy^3 + 2x^2y^2$; $R = 0$
- $(2a^5b^2 + a^4b^3 - a^3b^4) : (2a-b)$ Resp.: $Q = a^4b^2 + a^3b^3$; $R = 0$
- Verificar se o polinômio $2x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 3x^2 + x^2 + x$ é divisível por $x+1$ sem efetuar a divisão. Resp.: Sim
- Verificar se o polinômio $x^3 - 10x^2 + 23x - 14$ é divisível pelo produto $(x-1)(x-2)$. Resp.: Sim
- Dividir o polinômio $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ pelo produto $(x-2)(x-3)$. Resp.: $x-1$
- Achar o valor numérico do polinômio $4x^3 - 5x^2 + 3x - 2$, para $x = \frac{2}{3}$, sem fazer a substituição de x por $\frac{2}{3}$ Resp.: $-\frac{28}{27}$
- Achar o valor de m que torna o polinômio $x^4 - 3x^2 + mx - 2$ divisível por $x-2$. Resp.: $m = -1$
- Achar p e q de modo que o polinômio $x^3 - 10x^2 + px + q$ seja divisível pelo produto $(x-1)(x-2)$, sem efetuar a divisão. Resp.: $p = 23$, $q = -14$
- Verificar que o polinômio $x^m - a^m - b^m + (a+b-x)^m$ é sempre divisível por $(x-a)(x-b)$.
- Achar os valores de a e b que tornam $x^4 - ax^3 + bx^2 + bx + 9$ divisível por $x^2 - 1$. Resp.: $a = b = -10$

21. Que divisores da forma $x \pm a$ tem o polinômio $x^2 + x - 2$?
 Resp.: $x - 1$ e $x + 2$
22. Aplique o dispositivo prático de Ruffini para calcular $P(1)$ e $P(-3)$, sendo $P(x) = 3x^3 + x^2 - 2x + 4$.
 Resp.: $P(1) = 6$, $P(-3) = -62$
23. Achar o valor numérico do polinômio $P(x) = x^4 - 3x^3 + 7x - 2$ e de suas derivadas sucessivas para $x = 2$, sem fazer a substituição de x por 2.
 Resp.: 4, 3, 6, 5, 1
24. Dado $P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x - 7$, calcular $P(x+1)$ e $P(x-1)$.
 Resp.: $P(x+1) = x^4 + 2x^3 + 3x - 3$, $P(x-1) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 5x - 9$
25. Desenvolver o polinômio $2x^2 - 5x + 7$, segundo as potências de $x - 3$.
 Resp.: $2(x-3)^2 + 7(x-3) + 10$
26. Desenvolver o polinômio $4x^3 + 5x^2 - 6x + 7$ segundo as potências de $x + 2$.
 Resp.: $4(x+2)^3 - 19(x+2)^2 + 22(x+2) + 7$
27. Achar os valores de m para os quais $x^3 + mx^2 - 10x + m^2$ é divisível por $x - 2$.
 Resp.: 2 e -6
28. Achar o valor de m de modo que o resto da divisão do polinômio $4x^3 - 5x^2 + mx - 7$ por $x - 2$ seja 3.
 Resp.: $m = -1$
29. Achar os binômios da forma $x - a$ que dividem o polinômio $x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = 0$.
 Resp.: $x + 2$, $x - 2$, $x + 5$
30. O polinômio $P(x)$ dividido por $x - 1$ dá resto 10 e, dividido por $x - 2$, dá resto 16. Qual o resto da divisão do mesmo polinômio pelo produto $(x - 1)(x - 2)$.
 Resp.: $6x + 4$

equações algébricas

10.1 - Forma canônica. Qualquer equação algébrica

$$P(x) = 0$$

pode, mediante determinadas operações, ser reduzida à forma

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_m = 0 \quad (1)$$

onde $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$ (coeficientes) são números reais ou complexos.

A equação

$$\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+3} = 1$$

por exemplo, dará, como sabemos:

$$x^2 - 14x + 13 = 0$$

A forma (1) denomina-se **forma canônica** e só trataremos das equações dessa forma com *coeficientes reais*.

A resolução algébrica, isto é, por intermédio de *fórmulas*, só é possível até as equações do *quarto grau*. Do quinto grau em diante, calculam-se diretamente os *valores numéricos* das raízes sem aplicação de fórmulas. A pesquisa destes valores, intimamente ligada às propriedades do polinômio do primeiro membro, pois as raízes são os **zeros** do polinômio, será objeto deste e dos posteriores capítulos.

10.2 - Teorema fundamental da Álgebra.

Toda equação algébrica racional inteira tem uma raiz, real ou complexa.

Este teorema, instituído por D'Alembert, embora não dê informação alguma sobre o processo para achar a raiz, é da maior importância.

A demonstração rigorosa fica fora dos limites de nosso curso e, por isso, o aceitamos sem prova.

10.3 — Decomposição de um polinômio em fatores binômios. Consideremos a equação

$$P(x) = 0$$

de grau m , reduzida à forma canônica (1).

De acordo com o teorema fundamental, a equação admitirá uma raiz r_1 , isto é:

$$P(r_1) = 0$$

Assim, $P(x)$ é divisível por $x - r_1$ (parágrafo 98) e teremos

$$P(x) \equiv (x - r_1) \cdot Q_1(x)$$

$Q_1(x)$ é de grau $m - 1$ e, pelo mesmo teorema, a equação $Q_1(x) = 0$ admitirá uma raiz r_2 e, portanto:

$$Q_1(x) \equiv (x - r_2) \cdot Q_2(x)$$

Repetindo o raciocínio com a equação $Q_1(x) = 0$ e, assim, sucessivamente, os graus dos quocientes $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, ..., diminuirão de uma unidade; logo, o quociente $Q_{m-1}(x)$ será do primeiro grau e Q_m , constante.

Podemos, pois, escrever a sucessão de identidades:

$$P(x) \equiv (x - r_1) Q_1(x)$$

$$Q_1(x) \equiv (x - r_2) Q_2(x)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$Q_{m-1}(x) = (x - r_m) \cdot Q_m$$

Multiplicando membro a membro e simplificando os fatores comuns aos dois membros, virá:

$$P(x) \equiv Q_m (x - r_1) (x - r_2) \dots (x - r_m)$$

O coeficiente de maior grau de $P(x)$ é A_0 (forma canônica 1) e o coeficiente de maior grau do produto de segundo membro da última igualdade, é, como se verifica facilmente Q_m ; logo, $Q_m = A_0$ e podemos escrever:

$$P(x) = A_0 (x - r_1) (x - r_2) \dots (x - r_m) \quad (2)$$

Assim, todo polinômio de grau m pode ser decomposto no produto do coeficiente do primeiro termo por m binômios do primeiro grau, reais ou complexos.

10.4 — Raízes múltiplas. As raízes $r_1, r_2, \dots$, podem não ser todas distintas, pois nada obriga que sejam diferentes as raízes das equações $P(x) = 0$, $Q_1(x) = 0$, etc., da demonstração anterior.

Se dentre os números $r_1, r_2, \dots$, dois forem iguais denominaremos *raiz dupla* da equação, se três iguais *raiz tripla* e assim por diante.

Se r for raiz da equação $P(x) = 0$, teremos:

$$P(x) = (x - r) \cdot Q_1(x)$$

Se r for raiz múltipla, será raiz da equação $Q_1(x) = 0$ e portanto

$$Q_1(x) = (x - r) Q_2(x)$$

donde:

$$P(x) = (x - r)^2 \cdot Q_2(x)$$

Se tivermos $Q_2(r) \neq 0$, r é *raiz dupla*. Ao contrário, se $Q_2(r) = 0$, r é *raiz tripla* e assim por diante, concluindo-se que o grau de multiplicidade fica determinado por divisões sucessivas.

De modo geral, no caso das raízes múltiplas a decomposição indicada na igualdade (2), será:

$$P(x) \equiv A_0 (x - r_1)^\alpha (x - r_2)^\beta \dots (x - r_n)^\gamma$$

onde $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, são os graus de multiplicidade das raízes $r_1, r_2, \dots, r_n$ e $\alpha + \beta + \dots + \gamma = m$

Exemplo:

Verificar que o número 3 é raiz dupla da equação

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 = 0$$

Resolução. Efetuando divisões sucessivas por $x - 3$ pelo dispositivo, prático, teremos:

	1	-3	-7	+15	+18
3	1	0	-7	-6	0
3	1	3	2	0	
	1	6	20		

Assim, o polinômio é divisível por $(x - 3)^2$ e não é por $(x - 3)^3$; logo, 3 é raiz dupla.

10.5 - Número de raízes. A igualdade (2) permite escrever a equação $P(x) = 0$ com a forma:

$$A_0(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_m) = 0 \quad (3)$$

A equação verifica-se, portanto, para os números

$$x = r_1, r_2, \dots, r_m$$

e somente para estes, dentre os quais pode haver dois ou mais iguais (raízes múltiplas).

Conclui-se:

Tôda equação racional, inteira, de grau m , admite m raízes, simples ou múltiplas.

10.6 - Raízes nulas. Suponhamos que a equação $P(x) = 0$ tenha p raízes nulas, isto é:

$$r_1 = r_2 = \dots = r_p = 0$$

Neste caso, a igualdade (3) será:

$$A_0 x^p (x - r_{p+1}) \dots (x - r_m) = 0$$

e o primeiro membro é divisível por x^p .

Recíprocamente, se o primeiro membro tiver o fator x^p , a equação admitirá p raízes nulas.

Exemplo:

A equação $x^4 - 5x^3 + 6x^2 = 0$

admite duas raízes nulas:

$$x^2(x^2 - 5x + 6) = 0$$

As outras raízes serão as da equação

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

isto é:

$$x_3 = 2 \text{ e } x_4 = 3$$

10.7 - Raízes complexas.

Se uma equação de coeficientes reais admitir a raiz $a + bi$, admitirá, também, sua conjugada $a - bi$.

Seja a equação $P(x) = 0$.

Calculando $P(x)$ para $x = a + bi$ e para $x = a - bi$, os resultados serão:

$$P(a + bi) = \alpha + \beta i$$

$$P(a - bi) = \alpha - \beta i$$

de acôrdo com as operações com números complexos.

Por hipótese $a + bi$ é raiz; logo, temos:

$$\alpha + \beta i = 0$$

o que acarreta $\alpha = 0$ e $\beta = 0$

e portanto $\alpha - \beta i = 0$

concluindo-se que $a - bi$ é, também, raiz.

Consequências.

1.ª) O número de raízes complexas é sempre par.

2.ª) Tôda equação de grau ímpar tem, pelo menos, uma raiz real.

10.8 — Relações entre os coeficientes e as raízes.

Seja a equação

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \dots + A_m = 0$$

Como sabemos (igualdade 2) o primeiro membro pode ser decomposto no produto de m binômios do primeiro grau e, portanto, podemos concluir a identidade:

$$\begin{aligned} A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_m &\equiv \\ &\equiv A_0(x-r_1)(x-r_2)\dots(x-r_m) \end{aligned}$$

Efetuada o produto do segundo membro, virá:

$$\begin{aligned} A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \dots + A_m &\equiv \\ &\equiv A_0x^m - A_0(r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_m)x^{m-1} \\ &+ A_0(r_1r_2 + r_1r_3 + \dots + r_1r_m + r_2r_3 + \dots + r_{m-1}r_m)x^{m-2} - \\ &- A_0(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \dots + r_{m-2}r_{m-1}r_m)x^{m-3} + \\ &\dots \\ &(-1)^m A_0r_1r_2\dots r_m \end{aligned}$$

Da identidade resulta:

$$\begin{aligned} A_1 &= -A_0(r_1 + r_2 + \dots + r_m) \\ A_2 &= +A_0(r_1r_2 + r_1r_3 + \dots + r_{m-1}r_m) \\ A_3 &= -A_0(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \dots + r_{m-2}r_{m-1}r_m) \\ &\dots \\ A_m &= (-1)^m A_0r_1r_2\dots r_m \end{aligned}$$

Daí as relações entre as raízes e os coeficientes

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + \dots + r_m &= -\frac{A_1}{A_0} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + \dots + r_{m-1}r_m &= \frac{A_2}{A_0} \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \dots + r_{m-2}r_{m-1}r_m &= -\frac{A_3}{A_0} \\ &\dots \\ r_1r_2\dots r_m &= (-1)^m \frac{A_m}{A_0} \end{aligned}$$

Exemplo:

Dada a equação do 3.º grau:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

cuja três raízes representaremos por x_1, x_2 e x_3 ; teremos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 11 \\ x_1x_2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

10.9 — Aplicações.

1.ª) Dadas as raízes, formar a equação.

Exemplo:

Formar a equação, cujas raízes são 2, -2 e 3. A equação é do 3.º grau, isto é, da forma:

$$A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0$$

ou, dividindo por A_0 :

$$x^3 + \frac{A_1}{A_0}x^2 + \frac{A_2}{A_0}x + \frac{A_3}{A_0} = 0 \quad (1)$$

Pelas relações estudadas temos, então:

$$2 - 2 + 3 = -\frac{A_1}{A_0} \dots \frac{A_1}{A_0} = -3$$

$$2(-2) + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = \frac{A_2}{A_0} \dots \frac{A_2}{A_0} = -4$$

$$2 \cdot (-2) \cdot 3 = -\frac{A_3}{A_0} \dots \frac{A_3}{A_0} = 12$$

Substituindo em (1), virá a equação pedida:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

2.ª) Resolver uma equação, cujas raízes satisfazem certas condições dadas.

Exemplo:

Resolver a equação $x^3 - 9x^2 + 24x - 20 = 0$, sabendo que tem uma raiz dupla.

Resolução. Considerando as relações entre as raízes e os coeficientes e a condição dada, vem:

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 24 \\ x_1x_2x_3 &= 20 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de x_2 nas três primeiras:

$$(2) \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 9 \quad \therefore x_3 = 9 - 2x_1 \\ x_1^2 + 2x_1x_3 &= 24 \\ x_1^2x_3 &= 20 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de x_3 na segunda:

$$x_1^2 + 2x_1(9 - 2x_1) = 24$$

donde a equação de uma incógnita:

$$x_1^2 - 6x_1 + 8 = 0$$

cujas raízes são: $x_1' = 2$ e $x_1'' = 4$

Assim, teremos, considerando a equação (2):

$$1.º) \quad x_1 = x_2 = 2 \quad \therefore x_3 = 9 - 4 = 5$$

Como estes valores satisfazem a terceira equação do sistema (1), conclui-se que as raízes são 2, 2 e 5.

$$2.º) \quad x_1 = x_2 = 4 \quad \therefore x_3 = 9 - 8 = 1$$

Como estes valores não satisfazem a terceira equação de (1), conclui-se que a questão tem apenas uma solução.

10.10 — Raízes racionais. TEOREMA:

Se o número racional irredutível $\frac{p}{q}$, for raiz da equação de coeficientes inteiros

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m = 0$$

p será divisor de A_m e q , divisor de A_0 .

Demonstração.

Por hipótese $\frac{p}{q}$ é raiz, logo devemos ter:

$$A_0\left(\frac{p}{q}\right)^m + A_1\left(\frac{p}{q}\right)^{m-1} + \dots + A_{m-1}\left(\frac{p}{q}\right) + A_m = 0$$

ou, multiplicando os dois membros por q^m :

$$A_0p^m + A_1p^{m-1}q + \dots + A_{m-1}pq^{m-1} + A_mq^m = 0 \quad (1)$$

A última igualdade pode ser escrita com a forma:

$$p(A_0p^{m-1} + A_1p^{m-2}q + \dots + A_{m-1}q^{m-1}) = -A_mq^m$$

O primeiro membro é um inteiro que tem o fator p ; logo, o segundo membro será divisível por p e como p e q são primos entre si por hipótese, conclui-se ser p um divisor de A_m .

Do mesmo modo a igualdade (1) pode ser escrita:

$$A_0p^m = -(A_1p^{m-1} + \dots + A_{m-1}pq^{m-2} + A_mq^{m-1}) \cdot q$$

O segundo membro tem o fator q ; logo, o primeiro membro também será divisível por este fator e, como q e p são primos entre si por hipótese, conclui-se ser q um divisor de A_0 .

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Se $q = 1$, o número $\frac{p}{q}$ será o racional inteiro p , concluindo-se:

Toda raiz inteira é divisor do último termo A_m .

2.ª) A equação de coeficientes inteiros

$$x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_m = 0$$

se tiver raízes racionais, serão necessariamente inteiras e divisores do último termo, A_m .

Realmente, para a equação considerada temos $A_0 = 1$ e, portanto, $q = 1$ (divisor de A_0) e $\frac{p}{q}$ é um inteiro.

Exemplos:

1.º Achar as raízes racionais da equação

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$$

Resolução. De acôrdo com o teorema anterior e a segunda consequência, as raízes racionais serão números inteiros divisores de 12. Os divisores de 12 são: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$ e ± 12 .

Como a cada raiz r_1 corresponde um divisor do polinômio da forma $x - r_1$ e reciprocamente, podemos achar as raízes racionais efetuando divisões sucessivas pelos binômios $x \pm 1, x \pm 2$, etc. A cada divisão exata corresponderá uma raiz. Temos, assim, utilizando o dispositivo prático.

(não é raiz)	-1	1	-4	-1	16	-12
(1.ª raiz)	1	1	-5	4	12	-24
(2.ª raiz)	-2	1	-3	-4	12	0
(3.ª raiz)	2	1	-5	6	0	
(4.ª raiz)	3	1	-3	0		
		1	0			

As raízes são: 1, -2, 2, 3.

NOTA: Encontrada uma raiz, é útil verificar novamente o mesmo divisor pois a raiz pode ser múltipla.

2.º Achar as raízes racionais da equação

$$2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$$

Resolução. Os divisores do 1.º coeficiente (A_0) são: ± 1 e ± 2 e os do último (A_n) são ± 1 . Assim, as raízes racionais possíveis serão ± 1 e $\pm \frac{1}{2}$, às quais correspondem os fatores $x \pm 1$ e $2x \pm 1$ do polinômio do primeiro membro.

Efetuando as divisões sucessivas, temos:

(não é raiz)	-1	2	1	2	1
(não é raiz)	1	2	-1	3	-2
(1.ª raiz)	$-\frac{1}{2}$	2	3	5	6
(raiz simples)	$-\frac{1}{2}$	2	0	2	0
(não é raiz)	$+\frac{1}{2}$	2	-1	$\frac{5}{2}$	
		2	1	$\frac{3}{2}$	

Concluimos que a única raiz racional é $-\frac{1}{2}$ e a equação pode ser escrita:

$$(2x + 1)(x^2 + 1) = 0$$

As outras raízes poderiam ser encontradas resolvendo a equação do 2.º grau

$$x^2 + 1 = 0$$

e serão os imaginários $\pm i$.

NOTA: Se tivéssemos de aplicar o processo adotado para resolver a equação

$$9x^3 - 5x^2 + 7x + 6 = 0$$

concluiríamos que, se existissem raízes racionais, estas seriam de experimentar entre os números: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{9}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{2}{9}$, o que é excessivamente penoso, tornando o processo impraticável. Nos capítulos seguintes veremos a possibilidade de reduzir de muito o número de experiências, bem como cálculos mais simples para executá-las.

EXERCÍCIOS

- Quantas raízes nulas tem a equação $3x^4 - 11x^3 + 6x^2$? Ache as raízes não nulas.
Resp.: Duas, $\frac{2}{3}$ e 3
- Achar p de modo que a equação $3x^3 - 2x^2 + (p-1)x + p^2 - 1 = 0$, tenha uma e apenas uma raiz nula.
Resp.: $p = -1$
- Achar os valores de p e q de modo que a equação $x^4 + 3x^3 + (p-q)x^2 + (p-2q)x - (3p-6) = 0$ tenha duas e apenas duas raízes nulas.
Resp.: $p = 2, q = 1$
- Uma das raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0$ é $2 + 3i$. Quais as outras raízes complexas?
Resp.: $2 - 3i$
- O número 2 é raiz múltipla da equação $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = 0$. Achar o grau de multiplicidade.
Resp.: 2 é raiz tripla
- Achar o grau de multiplicidade da raiz -1 da equação $x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$
Resp.: raiz dupla

Formar a equação cujas raízes são:

- 4, 3 e 2
Resp.: $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$
- 5, 1 e 7
Resp.: $x^3 - 13x^2 + 47x - 35 = 0$
- 2, $\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{2}$
Resp.: $6x^3 - 11x^2 - 3x + 2 = 0$
- $2 + \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$, 1 e 2
Resp.: $x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 11x + 2 = 0$
- 3, $2 - 3i$ e $2 + 3i$
Resp.: $x^3 - 7x^2 + 25x - 39 = 0$

12. $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, 2i, -2i$ Resp.: $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 8x - 4 = 0$
13. Resolver a equação $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18 = 0$, sabendo que tem duas raízes simétricas. Resp.: 3, -3, 2, 1
14. Resolver a equação $x^3 - 10x^2 + 34x - 40 = 0$, sabendo que uma das raízes é 4. Resp.: 4, 3 + i, 3 - i
15. Resolver a equação $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, em que uma das raízes é a soma das duas outras. Resp.: 2, 3 e 5
16. Resolver a equação $x^3 + x^2 - 22x - 40 = 0$, em que uma raiz é o dúbio da outra. Resp.: -2, -4, 5
17. Resolver a equação $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$, cujas raízes estão em progressão aritmética. Resp.: 1, 3, 5
18. Quais os números inteiros que podem ser raízes da equação $2x^3 + x^2 - 18x - 9 = 0$
Resp.: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$
19. Quais os números racionais que podem ser raízes da equação $4x^3 - 18x^2 + 26x - 12 = 0$
Resp.: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}$

Achar as raízes racionais das equações:

20. $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$ Resp.: 3, 5, -2
21. $x^4 - 12x^3 + 29x^2 - 18x = 0$ Resp.: 0, 1, 2 e 9
22. $x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 10x - 25 = 0$ Resp.: 1, -1 e 5 (dupla)
23. $2x^3 + x^2 - 18x - 9 = 0$ Resp.: 3, -3, -1/2

Depois de achar as raízes racionais, resolver completamente as equações:

24. $3x^3 - 13x^2 + 7x - 1 = 0$ Resp.: $1/3, 2 \pm \sqrt{3}$
25. $2x^4 - 3x^3 - 3x - 2 = 0$ Resp.: $2, -\frac{1}{2}, \pm i$

equações transformadas

11.1 - Equação transformada. Dada a equação

$$P(x) = 0 \quad (1)$$

chama-se **transformada** uma nova equação

$$P(y) = 0 \quad (2)$$

cujas raízes dependem das da primeira segundo uma mesma lei. Por exemplo, cada raiz da equação (2) deve ser o dúbio de cada uma das da equação (1).

Há duas espécies de transformações:

- a) *Transformações de primeira ordem* ou de *Viète* — cada raiz da transformada depende apenas de uma raiz da primitiva.

Exemplo:

Dada a equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, achar a equação cujas raízes sejam, respectivamente, o dúbio de suas raízes, isto é, as raízes da transformada $P(y) = 0$, devem ser:

$$y_1 = 2x_1, y_2 = 2x_2, y_3 = 2x_3$$

- b) *Transformações de segunda ordem* ou de *Lagrange* — cada raiz da transformada depende de mais de uma raiz da primitiva.

Exemplo:

Dada a equação do exemplo anterior, formar a equação cujas raízes sejam a soma, duas a duas, de suas raízes.

Devemos ter:

$$y_1 = x_1 + x_2$$

$$y_2 = x_1 + x_3$$

$$y_3 = x_2 + x_3$$

Trataremos apenas das transformações de primeira ordem, cujas principais são:

1.ª) transformação aditiva

2.ª) transformação multiplicativa

3.ª) transformação recíproca

11.2 — Transformação aditiva. Dada a equação

$$P(x) = 0 \quad (1)$$

formar a equação

$$P(y) = 0 \quad (2)$$

de modo que se tenha a condição:

$$y = x + h \quad (3)$$

isto é, cujas raízes sejam as da primitiva adicionadas a h , sendo h um número inteiro. Se h for positivo as raízes virão aumentadas e, se negativo, virão diminuídas de h unidades.

O problema é muito simples. Realmente, da condição (3) de transformação tira-se:

$$x = y - h$$

e substituindo-se em (1), obtém-se a transformada

$$P(y - h) = 0$$

cujos primeiro membro pode ser obtido pela *formula de Taylor* (n.º 9.15, observação).

Exemplos:

1.º) Aumentar as raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, de duas unidades.

Temos a condição: $y = x + 2$

onde: $x = y - 2$

A fórmula de Taylor dá a transformada:

$$P(y-2) = P(-2) + P'(-2)y + \frac{P''(-2)}{2!} \cdot y^2 + \frac{P'''(-2)}{3!} \cdot y^3 = 0 \quad (4)$$

cujos coeficientes serão calculados pelo algoritmo Ruffini-Horner:

	1	-6	11	-6
-2	1	-8	27	-60
	1	-10	47	
	1	-12		
	1			

Substituindo os coeficientes em (4), vem:

$$y^3 - 12y^2 + 47y - 60 = 0$$

2.º) Transformar a equação $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$, de modo que as raízes venham diminuídas de 3 unidades.

A condição de transformação é

$$y = x - 3 \quad \text{onde} \quad x = y + 3$$

O algoritmo Ruffini-Horner será:

	1	-3	1	-3
3	1	0	1	0
	1	3	10	
	1	6		
	1			

Temos a transformada:

$$y^3 + 6y^2 + 10y = 0$$

APLICAÇÃO.

Transformar uma equação de modo a fazer desaparecer um certo termo.

Exemplo:

Transformar a equação $x^3 - 6x^2 + x + 6 = 0$, em outra desprovida do termo do 2.º grau.

Resolução. Estabeleçamos a condição:

$$y = x - h$$

$$x = y + h$$

onde:

virá, pela fórmula de Taylor:

$$P(y + h) = P(h) + P'(h) \cdot y + \frac{P''(h)}{2!} y^2 + \frac{P'''(h)}{3!} y^3$$

Temos:

$$\begin{aligned} P(h) &= h^3 - 6h^2 + h + 6 \\ P'(h) &= 3h^2 - 12h + 1 \\ P''(h) &= 6h - 12 \end{aligned}$$

Para que não exista o termo do 2.º grau, devemos ter:

$$6h - 12 = 0 \quad \therefore \quad h = 2$$

Obtido o valor de h , teremos o algarismo:

	1	-6	1	+6
2	1	-4	-7	-8
	1	-2	-11	
	1	0		
	1			

A equação pedida é:

$$y^3 - 11y - 8 = 0$$

11.3 - Transformação multiplicativa. Dada a equação

$$\begin{aligned} P(x) &= 0 & (1) \\ P(y) &= 0 & (2) \end{aligned}$$

formar a equação

de modo que se tenha

$$y = kx \quad (4)$$

isto é, cujas raízes sejam, respectivamente, múltiplas das da primitiva.

Da condição (4) conclui-se:

$$x = \frac{y}{k}$$

que substituída na equação (1) dá a transformada:

$$P\left(\frac{y}{k}\right) = 0$$

Exemplo:

Achar a transformada de raízes duplas da equação

$$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$$

Resolução. Temos a condição:

$$y = 2x, \quad \text{donde} \quad x = \frac{y}{2}$$

Substituamos o valor de x na equação dada e teremos a transformada:

$$2 \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^3 - 3 \left(\frac{y}{2}\right)^2 - 11 \left(\frac{y}{2}\right) + 6 = 0$$

ou

$$\frac{2y^3}{8} - \frac{3y^2}{4} - \frac{11y}{2} + 6 = 0$$

Simplificando e eliminando os denominadores, vem:

$$y^3 - 3y^2 - 22y + 24 = 0$$

APLICAÇÃO.

Obter a transformada, cujo coeficiente do termo de maior grau seja 1.

Exemplo:

Obter a transformada da equação $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$ que não admita raízes racionais fracionárias.

Resolução. Os coeficientes devem ser inteiros e o do termo de maior grau deve ser 1 (n.º 10.10).

Achemos a transformada de raízes multiplicadas pelo número k , isto é:

$$y = kx \quad \therefore \quad x = \frac{y}{k}$$

teremos:

$$\frac{3y^3}{k^3} - \frac{10y^2}{k^2} + \frac{9y}{k} - 2 = 0$$

ou

$$3y^3 - 10ky^2 + 9k^2y - 2k^3 = 0$$

Fazendo $k = 3$ e dividindo a equação por 3 (coeficiente do termo de maior grau), obtemos a transformada:

$$y^3 - 10y^2 + 27y - 18 = 0$$

OBSERVAÇÃO: A aplicação estudada é importantíssima, pois permite achar as raízes fracionárias de uma equação, calculando as raízes inteiras da transformada.

11.4 - Caso particular, onde $k = -1$. Transformada de raízes simétricas. Dada a equação

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_m = 0$$

a transformada em $y = kx$ será, como é fácil verificar, de modo análogo ao dos exemplos numéricos anteriores:

$$A_0x^m + k \cdot A_1x^{m-1} + k^2A_2x^{m-2} + \dots + k^mA_m = 0$$

Fazendo $k = -1$, vem:

$$A_0x^m - A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} - \dots + (-1)^m \cdot A_m = 0$$

Conclui-se:

Para obter a transformada de raízes simétricas basta trocar o sinal dos termos de grau ímpar se a equação for de grau par e os dos termos de grau par se for de grau ímpar.

Exemplo:

A transformada de raízes simétricas da equação

$$2x^4 - x^3 + x - 5 = 0$$

$$2x^4 + x^3 - x - 5 = 0$$

é

11.5 - Transformação recíproca. Dada a equação

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m = 0 \quad (1)$$

$$\text{formar a equação} \quad P(y) = 0 \quad (2)$$

de modo que se tenha

$$y = \frac{1}{x} \quad \therefore \quad x = \frac{1}{y}$$

Substituindo x por $\frac{1}{y}$ na equação (1), vem:

$$\frac{A_0}{y^m} + \frac{A_1}{y^{m-1}} + \dots + \frac{A_{m-1}}{y} + A_m = 0$$

$$\text{ou} \quad A_0 + A_1y + \dots + A_{m-1}y^{m-1} + A_my^m = 0$$

$$\text{isto é:} \quad A_my^m + A_{m-1}y^{m-1} + \dots + A_1y + A_0 = 0$$

Conclui-se:

Para obter a transformada de raízes recíprocas basta inverter a ordem dos coeficientes da primitiva, suposta completa.

Exemplo:

Achar a transformada de raízes recíprocas da equação

$$16x^4 - 20x^3 + 5x - 1 = 0$$

Resolução. Os coeficientes da equação suposta completa são 16, -20, 0, 5, -1. Logo, a transformada será, tornando positivo o primeiro coeficiente:

$$x^4 - 5x^3 + 20x - 16 = 0$$

OBSERVAÇÃO: A condição $y = \frac{1}{x}$ exige que se tenha $x \neq 0$. Logo, a transformação só se aplica às equações que não tenham raízes nulas, isto é, onde $A_m \neq 0$.

11.6 - Transformações compostas. Pode-se obter uma transformada que satisfaça a mais de uma condição de transformação.

Exemplo:

Achar a equação, cujas raízes sejam respectivamente 5 unidades maiores que o dobro das raízes da equação:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$$

Resolução. Primeiro acharemos a transformada de raízes multiplicadas por 2:

$$x^3 + 2 \cdot 6x^2 + 2^2 \cdot 11x + 2^3 \cdot 6 = 0$$

ou

$$x^3 + 12x^2 + 44x + 48 = 0$$

Em seguida, aumentamos de 5 unidades as raízes desta última, isto é:

$$y = x + 5 \quad \therefore \quad x = y - 5$$

O algoritmo será:

	1	12	44	48
-5	1	7	9	3
	1	2	-1	
	1	-3		
	1			

A transformada pedida é:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

EXERCÍCIOS

Achar a transformada de raízes simétricas das equações: (*)

- | | |
|---|--|
| 1. $3x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = 0$
2. $4x^3 + 2x - 7 = 0$ | 3. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$
4. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ |
|---|--|

Achar a transformada de raízes recíprocas de:

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| 5. $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$ | 6. $x^4 - 5x^3 + 20x - 16 = 0$ |
|---------------------------------|--------------------------------|

Achar a transformada de raízes, ao mesmo tempo, recíprocas e simétricas de:

- | | |
|----------------------------------|--------------------------|
| 7. $30x^3 - 31x^2 + 10x - 1 = 0$ | 8. $36x^3 - 19x + 5 = 0$ |
|----------------------------------|--------------------------|

(*) Respostas dos exercícios de 1 a 8 no fim dos exercícios

9. Formar a equação, cujas raízes sejam as de $x^3 - 12x^2 + 41x - 42 = 0$, diminuídas de 3 unidades.
10. Formar a equação, cujas raízes sejam as de $x^4 - 3x^3 + 2x^2 = 0$, aumentadas de 2 unidades.
11. Achar a transformada de $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, desprovida do termo do 2.º grau. Resp.: $y^3 - 13y + 12 = 0$
12. Achar a transformada de $x^4 - 8x^3 + 5x^2 - x + 7 = 0$, desprovida do termo do 3.º grau. Resp.: $y^4 - 19y^2 - 45y - 23 = 0$
13. Diminuir de uma unidade as raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$. Resp.: $y^3 - 4y^2 + 5y - 2 = 0$
14. Aumentar de uma unidade as raízes da equação anterior. Resp.: $y^3 - 10y^2 + 33y - 36 = 0$
15. Achar a transformada de $x^3 - x^2 - x + 5 = 0$, desprovida do termo do primeiro grau. Resp.: $y^3 + 2y^2 + 4 = 0$; $27y^3 - 54y^2 + 140 = 0$
16. Formar a equação de raízes duplas das da equação $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$. Resp.: $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$
17. Formar a equação, cujas raízes sejam o triplo das raízes da equação $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$. Resp.: $y^3 + 18y^2 + 99y + 162 = 0$
18. Formar a equação, cujas raízes sejam as de $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$, divididas por 2. Resp.: $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$
19. Transformar a equação $x^3 - 8x^2 + 15x = 0$ de modo que as raízes fiquem 3 unidades maiores que o dobro das primitivas, isto é, satisfaçam a função transformatriz: $y = 2x + 3$. Resp.: $y^3 - 25y^2 + 183y - 351 = 0$
20. Transformar a equação $2x^4 - 5x^3 + 3x - 1 = 0$, de modo que o coeficiente do primeiro termo seja a unidade e todos os coeficientes sejam inteiros. Resp.: $y^4 - 5y^3 + 12y - 8 = 0$
21. Transformar a equação $x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{12} = 0$ de modo que todos os coeficientes fiquem inteiros e não possam admitir raízes fracionárias. Resp.: $y^3 - 2y^2 - 9y + 18 = 0$
22. Achar a transformada da equação $12x^3 - 4x^2 - 3x + 1 = 0$, que não possa admitir raízes fracionárias. Resolver, em seguida, a equação dada por intermédio da transformada. Resp.: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$
23. Achar a transformada de $6x^3 + 5x^2 + 11x - 2 = 0$, que não possa admitir raízes fracionárias. Achar, em seguida, todas as raízes da equação dada. Resp.: $\frac{1}{6}, \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$

24. Questão idêntica à anterior para a equação $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2 = 0$

Resp.: $\frac{1}{2}, 1, -1, -2$

25. Transformar a equação $x^3 - 2x^2 + 7x - 4 = 0$ em uma outra, cujas raízes sejam iguais às suas, aumentadas de uma unidade (E. Técnica do Ex. — 1943).

Resp.: $y^3 - 5y^2 + 14y - 14 = 0$.

Respostas dos exercícios de 1 a 8:

- | | |
|---|----------------------------------|
| 1. $3y^3 + 5y^2 + 5y - 3 = 0$ | 5. $60y^3 - 47y^2 + 12y - 1 = 0$ |
| 2. $4y^3 + 2y + 7 = 0$ | 6. $16y^4 - 20y^3 + 5y - 1 = 0$ |
| 3. $y^4 + 10y^3 + 35y^2 + 50y + 24 = 0$ | 7. $y^3 + 10y^2 + 31y + 30 = 0$ |
| 4. $y^4 - 13y^2 + 36 = 0$ | 8. $5y^3 + 19y^2 - 36 = 0$ |

12.

cálculo das raízes inteiras

12.1 — Raízes inteiras. O cálculo das raízes inteiras pode ser feito, como vimos, experimentando quais os divisores do último termo da equação que são raízes, por intermédio do dispositivo prático de Ruffini.

O número de divisores a verificar pode ser excessivo. Daí o empenho em reduzi-los, por intermédio dos teoremas que estudaremos a seguir, limitando-nos, apenas, às exigências do programa.

12.2 — Raízes reais contidas num intervalo. Teorema de Bolzano.

Dada a equação $P(x) = 0$:

- 1.º Se $P(a)$ e $P(b)$ tiverem sinais contrários, isto é, $P(a) \cdot P(b) < 0$, no intervalo (a, b) há um número ímpar de raízes reais;
- 2.º Se $P(a)$ e $P(b)$ tiverem o mesmo sinal, isto é, $P(a) \cdot P(b) > 0$, no intervalo (a, b) haverá um número par (inclusive zero) de raízes reais.

Demonstração.

O primeiro membro da equação pode ser escrito:

$$P(x) = A_0(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_p) \cdot P'(x) \quad (1)$$

onde $r_1, r_2, \dots, r_p$, são as raízes reais e $P'(x)$, o produto dos binômios correspondentes às raízes complexas os quais, grupados dois a dois, darão:

$$[x - (a + bi)][x - (a - bi)] = [(x - a) - bi][(x - a) + bi] = (x - a)^2 + b^2$$

pois as raízes complexas são conjugadas, duas a duas.

Observemos, então, que, para quaisquer valores de x , o valor numérico de $P'(x)$ é sempre positivo, por serem positivos seus fatores da forma $(x - a)^2 + b^2$.

Se substituirmos, sucessivamente, x por a e por b na igualdade (1), obteremos:

$$P(a) = A_0(a - r_1)(a - r_2) \dots (a - r_p) P'(a)$$

$$P(b) = A_0(b - r_1)(b - r_2) \dots (b - r_p) P'(b)$$

Multiplicando, membro a membro, e agrupando os fatores que têm a mesma raiz, virá:

$$P(a) \cdot P(b) = A_0^2 [(a - r_1)(b - r_1)][(a - r_2)(b - r_2)] \dots P'(a) \cdot P'(b)$$

Os fatores A_0^2 , $P'(a)$ e $P'(b)$ são sempre positivos; logo, o sinal do produto

$$P(a) \cdot P(b)$$

depende dos fatores da forma:

$$(a - r_1)(b - r_1)$$

compreendidos nos colchetes. Ora, a cada raiz compreendida no intervalo (a, b) corresponde um colchete negativo, pois, sendo por exemplo

$$a < r_1 < b$$

teremos

$$(a - r_1)(b - r_1) < 0$$

assim, se o número de raízes compreendidas no intervalo for ímpar, teremos:

$$P(a) \cdot P(b) < 0$$

logo, $P(a)$ e $P(b)$ terão sinais contrários.

Se, ao contrário, o número de raízes do intervalo (a, b) for par inclusive zero, teremos:

$$P(a) \cdot P(b) > 0$$

tendo $P(a)$ e $P(b)$ sinais iguais.

Exemplo:

Seja a equação $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$. Calculemos $P(2)$ e $P(0)$.

Virá:

$$P(2) = 8 - 32 + 38 - 12 = 2 > 0$$

$$P(0) = -12 < 0$$

$P(2)$ e $P(0)$ têm sinais contrários; logo, no intervalo $(0, 2)$ há um número ímpar de raízes reais (pelo menos uma).

12.3 - Consequências.

1.ª) Toda equação algébrica de forma canônica com coeficientes reais e de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real de sinal contrário ao do último termo.

Sendo $P(x) = 0$ de grau ímpar, teremos:

$$P(-\infty) = -\infty, \quad P(0) = A_m, \quad P(+\infty) = +\infty$$

Assim:

- Se $A_m > 0$, há, pelo menos, uma raiz no intervalo $(-\infty, 0)$, isto é, negativa.
- Se $A_m < 0$, há, pelo menos, uma raiz no intervalo $(0, +\infty)$, isto é, positiva.

OBSERVAÇÃO: Se a equação tiver raízes nulas, estas devem ser excluídas previamente.

2.ª) Toda equação de forma canônica com coeficientes reais e de grau par, cujo último termo é negativo, tem, pelo menos, duas raízes reais de sinais contrários.

Sendo $P(x) = 0$, de grau par, teremos:

$$P(-\infty) = +\infty, \quad P(0) = A_m, \quad P(+\infty) = +\infty$$

Por hipótese $A_m < 0$; logo, existe uma raiz no intervalo $(-\infty, 0)$ e outra no intervalo $(0, +\infty)$.

12.4 — Determinação das cotas das raízes reais. Método de Laguerre. Chama-se *cota superior* das raízes positivas, um número positivo L , maior que a maior das raízes positivas.

Chama-se *cota inferior* das raízes positivas, um número positivo l , menor que a menor raiz positiva.

Analogamente definiremos as cotas L' e l' das raízes negativas.

Geralmente determinam-se apenas as cotas L e l' , entre as quais ficam *tôdas* as raízes da equação dada.

Observemos que a cota l' , das raízes negativas, é a cota L da transformada de raízes simétricas. Em vista disso, é suficiente estabelecer um processo de cálculo (algoritmo) para determinar a cota L (superior das raízes positivas).

Há vários métodos para a determinação das cotas, baseados no princípio:

L será uma cota superior das raízes positivas se tivermos

$$P(x) > 0$$

para todos os valores de x iguais ou maiores que L .

Realmente, se o primeiro membro for sempre positivo para $x \geq L$, não haverá valores de x maiores que L que o anularem e, portanto, não há raízes superiores a L .

Estudaremos, apenas, o método de Laguerre.

Seja a equação

$$P(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_m = 0$$

e dividamos o primeiro membro pelo binômio $x - L$, onde L é positivo. Teremos, então:

$$P(x) = (x - L)(A_0x^{m-1} + B_1x^{m-2} + \dots + B_{m-1}) + P(L) \quad (2)$$

onde, de acordo com a regra de Ruffini:

$$A_0 > 0$$

$$B_1 = A_0L + A_1$$

$$B_2 = B_1L + A_2$$

⋮

⋮

⋮

$$R = P(L)$$

Se L tornar positivos todos os coeficientes $B_1, B_2, \dots$, e o resto $P(L)$, será uma cota superior das raízes positivas, pois, para $x > L$, em virtude da igualdade (2) teremos

$$P(x) > 0$$

O método consiste, então, em dividir, sucessivamente, o primeiro membro da equação pelos binômios $x - 1, x - 2, \dots$, por intermédio do dispositivo prático de Ruffini até que o quociente correspondente tenha todos os coeficientes positivos e que também o seja o resto.

Na prática abandona-se a divisão desde que se obtenha um coeficiente negativo e, sempre que possível, verifica-se apenas o *signal* dos coeficientes.

Exemplo:

Achar as cotas das raízes reais da equação $2x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = 0$.

a) *Cota superior das raízes:*

	2	-3	-11	-6
1	2	—		
2	2	1	—	
3	2	3	—	
4	2	5	9	30

A cota superior é 4.

b) *Cota inferior das raízes reais:*

A transformada de raízes simétricas é:

$$2y^3 + 3y^2 - 11y + 6 = 0$$

As raízes positivas desta equação são as negativas da equação dada. Logo, sua maior raiz positiva será a menor negativa da equação dada.

Temos para a transformada :

	2	3	- 11	6
1	2	5	—	
2	2	7	3	12

A cota inferior das raízes reais é -2.

As raízes reais da equação dada estão no intervalo (-2, 4).

12.5 — Regras de exclusão de Newton. Já verificamos que o número de experiências para determinação das raízes reais diminui sensivelmente com a fixação das cotas.

Podemos diminuí-lo ainda mais, utilizando as *regras de exclusão de Newton* as quais permitem apenas concluir que um certo número inteiro *não é* raiz da equação $P(x) = 0$:

O número inteiro r que, diminuído de uma unidade não dividir $P(1)$ ou que, aumentado de uma unidade não dividir $P(-1)$, não é raiz da equação $P(x) = 0$.

Demonstração.

Suponhamos que o número inteiro r seja raiz.

Teremos :

$$P(x) = (x - r) \cdot Q(x)$$

Se fizermos, sucessivamente, $x = 1$ e $x = -1$, virá :

$$\begin{cases} P(1) = (1 - r) \cdot Q(1) \\ P(-1) = (-1 - r) \cdot Q(-1) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} P(1) = -(r - 1) \cdot Q(1) \\ P(-1) = -(r + 1) \cdot Q(-1) \end{cases}$$

donde : $\frac{P(1)}{r-1} = -Q(1)$ e $\frac{P(-1)}{r+1} = -Q(-1)$

Como $Q(1)$ e $Q(-1)$ são números inteiros, conclui-se que $P(+1)$ é divisível por $r-1$ e $P(-1)$ por $r+1$, o que justifica a regra de Newton.

12.6 — Algoritmo de Peletarius. As raízes inteiras podem ser pesquisadas por intermédio do dispositivo prático de Ruffini, como vimos no parágrafo 10.10.

Pode-se, também, obtê-las por um processo prático bem mais rápido denominado *algoritmo de Peletarius*.

Seja a equação de forma canônica :

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-2} x^2 + A_{m-1} x + A_m = 0$$

Se r for uma raiz inteira, teremos :

$$A_0 r^m + A_1 r^{m-1} + \dots + A_{m-2} r^2 + A_{m-1} r + A_m = 0$$

donde tiramos :

$$1) \quad \frac{A_m}{r} = -(A_0 r^{m-1} + A_1 r^{m-2} + \dots + A_{m-2} r + A_{m-1})$$

O polinômio entre parênteses é um n.º inteiro ; logo, r é divisor de A_m (fato já conhecido), seja q_1 o quociente, isto é :

$$q_1 = -A_0 r^{m-1} - A_1 r^{m-2} - \dots - A_{m-2} r - A_{m-1}$$

donde se conclui, facilmente :

$$(2) \quad \frac{q_1 + A_{m-1}}{r} = -A_0 r^{m-2} - A_1 r^{m-3} - \dots - A_{m-2}$$

O segundo membro é inteiro ; logo, r é divisor de $q_1 + A_{m-1}$; seja q_2 o quociente, isto é :

$$q_2 = -A_0 r^{m-2} - A_1 r^{m-3} - \dots - A_{m-2}$$

donde : $\frac{q_2 + A_{m-2}}{r} = -A_0 r^{m-3} - A_1 r^{m-4} - \dots$

e r deve ser divisor de $q_2 + A_{m-2}$. E assim, sucessivamente, o último quociente será :

$$q_m = \frac{q_{m-1} + A_1}{r} = -A_0$$

Conclui-se :

Para verificar se r é raiz, divide-se o último coeficiente por r (igualdade 1), soma-se ao resultado o penúltimo coeficiente e divide-se a soma por r (igualdade 2) e assim por diante.

Para que r seja raiz :

- 1.º) todos os quocientes devem ser inteiros ;
- 2.º) o último quociente deve ser $-A_0$.

Na prática, abandona-se a experiência desde que um quociente seja fracionário.

Exemplos :

- 1.º) Verificar se o número 2 é raiz da equação $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$.

O algoritmo de Peletarius é análogo ao de Ruffini, iniciadas as operações pelo último coeficiente.

1	- 12	+47	- 60	
		$\frac{17}{2}$	- 30	2

Conclui-se :

2 não é raiz pois o segundo quociente é fracionário.

- 2.º) Verificar se o número 3 é raiz da equação $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$.

1	- 5	8	- 6	
	- 1	2	- 2	3

Conclui-se :

3 é raiz porque todos os quocientes são inteiros e o último é simétrico de $A_0 = 1$.

12.7 - Cálculo das raízes inteiras.

Exemplo :

Achar as raízes inteiras da equação $x^4 - x^3 - 16x^2 + 4x + 48 = 0$.

Resolução.

- 1) Determinação das cotas L (positiva) e V (negativa).

a) Cota L . Método de Laguerre :

L	1	- 1	- 16	4	48
1	1	0	—		
2	1	1	—		
3	1	2	—		
4	1	3	—		
5	1	4	4	+	+

Temos : $L = . 5$

- b) Cota V . A transformada de raízes simétricas é :

$$y^4 + y^3 - 16y^2 - 4y + 48 = 0$$

A cota L (positiva) desta transformada será, pelo mesmo método :

L	1	1	- 16	- 4	48
1	1	2	—		
2	1	3	—		
3	1	4	—		
4	1	5	4	+12	+

Temos, para a equação dada :

$$V' = - 4$$

Logo, as raízes inteiras estão no intervalo $(-4, 5)$.

- 2) Divisores do último termo, pertencentes ao intervalo $(-4, 5)$:

Os divisores compreendidos no intervalo são :

$$-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$$

- 3) Divisores a excluir pela regra de Newton :

Temos :

$$P(1) = 1 - 1 - 16 + 4 + 48 = 36$$

$$P(-1) = 1 + 1 - 16 - 4 + 48 = 30$$

Ficam excluídos os divisores 1 e -1. Para os outros temos:

Divisor 2: $2 - 1 = 1$ divide $P(1)$

$2 + 1 = 3$ divide $P(-1)$; 2 pode ser raiz

Divisor 3: $3 - 1 = 2$ divide $P(1)$

$3 + 1 = 4$ não divide $P(-1)$; 3 não pode ser raiz

Divisor 4: $4 - 1 = 3$ divide $P(1)$

$4 + 1 = 5$ divide $P(-1)$; 4 pode ser raiz

Divisor -2: $-2 - 1 = -3$ divide $P(1)$

$-2 + 1 = -1$ divide $P(-1)$; -2 pode ser raiz

Divisor -3: $-3 - 1 = -4$ divide $P(1)$

$-3 + 1 = -2$ divide $P(-1)$; -3 pode ser raiz

Dos dez divisores de 48, experimentaremos, apenas:

2, 4, -2, -3

4) Algoritmo de Peletarius:

1	-1	-16	4	48	
	-1	-1	14	24	2 (é raiz)
		1	5	6	4 (é raiz)
			-1	-3	-2 (é raiz)
				1	-3 (é raiz)

As raízes inteiras são: -3, -2, 2 e 4.

OBSERVAÇÃO: As raízes fracionárias podem ser obtidas por intermédio da transformada de raízes inteiras.

EXERCÍCIOS

Achar as raízes inteiras das equações:

1. $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

Resp.: 2, 2 e -3

2. $2x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = 0$

Resp.: -1

3. $x^5 + 2x^4 - 13x^3 - 14x^2 + 24x = 0$

Resp.: 0, 1, 3, -2, -4

4. $x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 7x + 3 = 0$

Resp.: 3

5. $x^4 - x^3 - 28x^2 + 76x - 48 = 0$

Resp.: 4, 1, 2 e -6

Achar as raízes racionais, inteiras e fracionárias, transformando previamente em equações de raízes inteiras:

6. $4x^3 - 49x - 60 = 0$ Resp.: 4, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{2}$

7. $9x^3 - 9x^2 - 4x + 4 = 0$ Resp.: $\frac{2}{3}$, 1, $-\frac{2}{3}$

Achar todas as raízes das equações:

8. $x^3 + x^2 + 3x + 3 = 0$

Resp.: -1, $\pm i\sqrt{3}$

9. $2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$

Resp.: $-3/2$, $\pm i$

10. $9x^3 - 18x^2 - x + 2 = 0$

Resp.: $1/3$, $-1/3$, 2

equações recíprocas

13.1 - Definição. Diz-se que a equação $P(x) = 0$ é recíproca quando, admitindo a raiz r , de multiplicidade qualquer $p \geq 1$, admite também a raiz recíproca $\frac{1}{r}$, com o mesmo grau de multiplicidade.

Exemplo:

A equação do segundo grau

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

é recíproca porque as raízes $x' = 3$ e $x'' = \frac{1}{3}$, são números recíprocos ou inversos.

OBSERVAÇÃO: Da definição resulta que toda equação recíproca é equivalente à sua transformada de raízes inversas.

13.2 - Condições para que uma equação seja recíproca. Classificação. Suponhamos recíproca a equação

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m = 0 \quad (1)$$

nesta hipótese, a equação será equivalente à sua transformada de raízes inversas:

$$A_mx^m + A_{m-1}x^{m-1} + \dots + A_1x + A_0 = 0 \quad (2)$$

e, portanto, os primeiros membros diferem por um fator constante, isto é:

$$A_0 = kA_m, A_1 = kA_{m-1}, \dots, A_{m-1} = kA_1, A_m = kA_0 \quad (3)$$

Se considerarmos a primeira e última igualdades e fizermos a substituição, virá:

$$A_0 = k^2A_0 \quad \therefore \quad k^2 = 1$$

donde:

$$k = \pm 1$$

Este valor, substituído nas igualdades (3), dará as condições para que uma equação seja recíproca:

$$A_0 = \pm A_m, A_1 = \pm A_{m-1}, \dots, A_h = \pm A_{m-h}, \dots \quad (4)$$

Quando $k = +1$, os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos são iguais e a equação diz-se de **primeira classe**.

Quando $k = -1$, os coeficientes equidistantes dos extremos são simétricos e a equação diz-se de **segunda classe**, ou de **segunda espécie**.

OBSERVAÇÃO: Se a equação é de grau par, isto é:

$$m = 2h$$

haverá um termo central de coeficiente A_h e a relação geral das igualdades (4), $A_h = \pm A_{m-h}$, ficará:

$$A_h = \pm A_h$$

a qual para $k = -1$, dará:

$$A_h = -A_h \quad \therefore \quad A_h = 0$$

Conclui-se:

A equação recíproca de grau par só pode ser de segunda classe, se não tiver o termo central.

Resultam as condições:

Uma equação é recíproca quando os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos são iguais ou simétricos. A equação de grau par que tiver os coeficientes equidistantes dos extremos simétricos só será recíproca se for desprovida do termo médio.

13.3 — Forma normal. A equação recíproca de primeira classe e de grau par:

$$A_0x^{2n} + A_1x^{2n-1} + \dots + A_1x + A_0 = 0$$

a que se pode reduzir a resolução de todas as outras chama-se **forma normal** das equações recíprocas.

13.4 — Redução à forma normal.

1.º CASO: Equação de primeira classe de grau ímpar.

Se a equação

$$A_0x^{2m+1} + A_1x^{2m} + \dots + A_1x + A_0 = 0 \quad (5)$$

é de grau ímpar o número de termos, $m + 1$, será par e, portanto, os termos se correspondem dois a dois. Então, substituindo-se x por -1 , os termos de grau ímpar trocam de sinal, e os de grau par conservam o sinal e, como eram iguais, passam a ser simétricos concluindo-se

$$P(-1) = 0$$

Assim, o primeiro membro da equação (5) é divisível por $x + 1$ e o quociente será de grau par (pois se m é ímpar $m-1$ é par) e da forma:

$$B_0x^{2m} + B_1x^{2m-1} + \dots + B_{m-2}x + B_{m-1} = 0 \quad (6)$$

que ainda será recíproca pois admite as $m - 1$ raízes restantes da equação (5). Pelas leis de Ruffini devemos ter:

$$B_0 = A_0 \text{ e } R = B_{m-1}(-1) + A_0 = 0 \therefore B_{m-1} = A_0$$

Conclui-se:

$$B_{m-1} = B_0$$

e a equação (6) é de forma normal.

2.º CASO: Equação de segunda classe de grau ímpar.

Seja a equação de grau ímpar:

$$A_0x^{2m+1} + A_1x^{2m} + A_2x^{2m-1} + \dots - A_2x^2 - A_1x - A_0 = 0 \quad (7)$$

É claro que para $x = 1$, tem-se $P(1) = 0$; logo, o primeiro membro de (7) é divisível por $x - 1$. Efetuando a divisão e igualando o quociente a zero, teremos a equação de grau par:

$$B_0x^{m-1} + B_1x^{m-2} + \dots + B_{m-2}x + B_{m-1} = 0 \quad (8)$$

que ainda é recíproca pois admite as $m - 1$ raízes de (7).

Pelas leis de Ruffini virá:

$$B_0 = A_0 \text{ e } R = B_{m-1}(+1) - A_0 = 0 \therefore B_{m-1} = A_0$$

conclui-se: $B_{m-1} = B_0$

e a equação (8) é de forma normal.

3.º CASO: Equação de segunda classe de grau par.

Seja a equação de grau par:

$$A_0x^{2m} + A_1x^{2m-1} + A_2x^{2m-2} + \dots - A_2x^2 - A_1x - A_0 = 0 \quad (8)$$

Para $x = 1$, teremos:

$$A_0 + A_1 + A_2 + \dots - A_2 - A_1 - A_0 = 0$$

visto serem os coeficientes simétricos.

Assim, o primeiro membro é divisível por $x - 1$ e o quociente igualado a zero dará a equação de grau ímpar:

$$B_0x^{2m-1} + B_1x^{2m-2} + \dots + B_{m-1} = 0 \quad (9)$$

que também será recíproca, pois contém as demais raízes de (8).

Pelas leis de Ruffini virá:

$$B_0 = A_0 \text{ e } B_{m-1}x1 - A_0 = 0 \therefore B_{m-1} = A_0$$

Resulta:

$$B_{m-1} = B_0$$

e a (9) será recíproca de primeira classe e de grau ímpar, isto é, do primeiro caso. Assim, a (9) terá o primeiro membro divisível por $x - 1$ e dará uma equação de forma normal.

Conclui-se :

A equação recíproca de grau par e de segunda classe tem o primeiro membro divisível por $x - 1$ e por $x + 1$, reduzindo-se por estas duas divisões sucessivas à forma normal.

Exemplos :

1.º) Reduzir à forma normal a equação

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$$

Resolução. O primeiro membro é divisível por $x + 1$ e o quociente será :

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -3 & -3 & 2 \\ & 2 & -5 & 2 & 0 \end{array}$$

Assim, as raízes da equação são : -1 e as da equação de forma normal

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

2.º) Reduzir à forma normal $6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0$.

Resolução. O primeiro membro é divisível por $x - 1$:

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 1 & 6 & -41 & 97 & -97 & 41 & -6 \\ 0 & 6 & -35 & 62 & -35 & 6 & 0 \end{array}$$

As raízes da equação dada são 1 e as da equação de forma normal :

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$$

3.º) Reduzir à forma normal $4x^6 - 21x^4 + 21x^2 - 4 = 0$.

Resolução. O primeiro membro é divisível por $x - 1$ e por $x + 1$. As divisões sucessivas dão :

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} 1 & 4 & 0 & -21 & 0 & 21 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 4 & -17 & -17 & 4 & 4 & 0 \\ & 4 & 0 & -17 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}$$

As raízes são -1 , $+1$ e as da de forma normal :

$$4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$$

13.5 - Resolução das equações recíprocas. Como vimos no parágrafo anterior todas as equações recíprocas podem ser reduzidas à forma normal.

Resulta que basta conhecer a resolução das de forma normal.

Consideremos, então, a equação :

$$A_0x^{2h} + A_1x^{2h-1} + \dots + A_{1h}x + A_0 = 0$$

Dividindo por x^h , visto como $x \neq 0$, pois as equações recíprocas não têm raiz nula, temos :

$$A_0x^h + A_1x^{h-1} + \dots + \frac{A_1}{x^{h-1}} + \frac{A_0}{x^h} = 0$$

Grupando os termos de coeficientes iguais :

$$A_0 \left(x^h + \frac{1}{x^h} \right) + A_1 \left(x^{h-1} + \frac{1}{x^{h-1}} \right) + \dots + A_h = 0$$

Façamos então :

$$x + \frac{1}{x} = y \quad (10)$$

elevando ao quadrado :

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2$$

donde

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

e assim por diante. De modo geral, teremos :

$$x^p + \frac{1}{x^p} = \left(x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}} \right) \left(x + \frac{1}{x} \right) - \left(x^{p-2} + \frac{1}{x^{p-2}} \right) \quad (11)$$

Realmente :

$$\left(x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}} \right) \left(x + \frac{1}{x} \right) = x^p + \frac{1}{x^p} + x^{p-2} + \frac{1}{x^{p-2}}$$

donde, tirando o valor de $x^p + \frac{1}{x^p}$, conclui-se a fórmula (11).

Exemplo :

Resolver a equação $6x^5 - 13x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 13x + 6 = 0$.

Resolução. A equação é de grau ímpar e o primeiro membro é divisível por $x + 1$. O quociente será :

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 6 & -13 & 6 & 6 & -13 & 6 \\ & 6 & -19 & 25 & -19 & 6 & 0 \end{array}$$

Encontrada a raiz -1 , resolveremos a equação:

$$6x^4 - 19x^3 + 25x^2 - 19x + 6 = 0$$

Teremos, dividindo por x^2 :

$$6x^2 - 19x + 25 - \frac{19}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

ou

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 19\left(x + \frac{1}{x}\right) + 25 = 0$$

Se fizermos $x + \frac{1}{x} = y$ (1) $\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

virá

$$6(y^2 - 2) - 19y + 25 = 0$$

ou

$$6y^2 - 19y + 13 = 0$$

cujas raízes são: $y' = 1$ e $y'' = \frac{13}{6}$.

Substituindo a primeira raiz em (1)

$$x + \frac{1}{x} = 1 \therefore x^2 - x + 1 = 0$$

e, portanto: $x_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ e $x_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

Substituindo a segunda raiz:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6} \therefore 6x^2 - 13x + 6 = 0$$

donde, finalmente, as duas últimas raízes:

$$x_4 = \frac{3}{2} \text{ e } x_5 = \frac{2}{3}$$

Resposta: as raízes são: $-1, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

EXERCÍCIOS

Resolver as equações:

1. $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$

Resp.: $1, 2, 1/2$

2. $6x^6 - 21x^4 + 21x^2 - 6 = 0$

Resp.: $1, -1, \pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

3. $3x^3 - 5x^2 - 5x + 3 = 0$

Resp.: $-1, \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$

4. $x^4 - x^3 - x + 1 = 0$ Resp.: $1, 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$

5. $12x^4 - 91x^3 + 194x^2 - 91x + 12 = 0$ Resp.: $3, 1/3, 4, 1/4$

6. $12x^5 - 16x^4 - 37x^3 + 37x^2 + 16x - 12 = 0$ Resp.: $1, 2, 1/2, -2/3, -3/2$

7. $12x^4 - 25x^3 + 25x - 12 = 0$ Resp.: $1, -1, 3/4, 4/3$

8. $6x^5 - 29x^4 + 27x^3 + 27x^2 - 29x + 6 = 0$ Resp.: $-1, 2, 3, 1/2, 1/3$

9. $x(x-1) + \frac{1}{(x-2)(x-3)} = 0$ Resp.: $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (duplas)

10. $6x^5 - 11x^4 - 33x^3 + 33x^2 + 11x - 6 = 0$ Resp.: $1, 3, 1/3, -2, -1/2$
(E. Militar, 1922)

11. $x^7 - 5x^6 + 3x^5 + 9x^4 - 9x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = 0$
Resp.: 1 (tripla), -1 (dupla), $2 \pm \sqrt{3}$

12. Dada a equação

$$x^6 + 8ax^5 + (b-2)x^4 + (4a+b+c)x^3 + 2ax^2 + (b-2a)x - 1 = 0$$

achar a, b, c para que esta equação seja recíproca e calcular as raízes para estes valores de a, b, c . (E.N.E. — 1947)

Resp.: $-1/2, 3, -1, x = 1, -1, \pm i, 2 \pm \sqrt{3}$

13. Achar os valores de p e q , de modo que a equação $x^4 - 2x^3 + px + q = 0$ seja recíproca e depois resolvê-la. (E. Naval — 1937)

Resp.: $p = -2, q = 1$ ou $p = 2, q = -1$

APÊNDICE

QUESTÕES DE CONCURSO DE HABILITAÇÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

I. Funções. Gráficos. Limites. Continuidade

- 1) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{1-x^2} \right)$. (E.P.U.C. — 1958) *Resp.*: ∞ .
- 2) Estude a função $y = e^{-(x-a)^2}$ quanto aos máximos e mínimos. (E.N.E. — 1960) *Resp.*: máx. para $x = a$.
- 3) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$. (E.N.E. — 1960) *Resp.*: Ver pág. 47-30 ex.).
- 4) Calcule o limite da seguinte função quando x tende para infinito e quando x tende para 1:
$$y = x^{\frac{1}{1-x}}$$
 (E.N.E. — 1950) *Resp.*: 1, e.

II. Geometria Analítica

- 5) Um quadrado tem um de seus vértices na origem e outro vértice, oposto ao primeiro no ponto $(-6, -2)$. Determinar: a) a diagonal deste quadrado; b) as coordenadas dos outros dois vértices. (E.P.U.C. — Rio 1948) *Resp.*: $2\sqrt{10}$; $(-2; -4)$; $(-4; 2)$.
- 6) As coordenadas de dois vértices consecutivos de um paralelogramo são $(8, 3)$ e $(2, -6)$. Calcule as coordenadas dos outros vértices, sabendo que as diagonais se cortam no ponto $(3, -1)$. (E.N.E. — 1959).
- 7) Calcule a distância do centro do círculo circunscrito ao triângulo retângulo de vértices $A(4, 0)$, $B(8, 0)$ e $C(4, 6)$ à reta $y = x - 2$. (E.N.E. — 1958) *Resp.*: 3,54 ou $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- 8) Dê as equações das linhas representadas pela equação $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$. (E.N.E. — 1958) *Resp.*: $x - 2y = 0$ e $x - 3y = 0$.
- 9) Dê as equações das linhas representadas pela equação $y^3 - 5y^2 + 6y = 0$. (E. Flum. E. — 1958) *Resp.*: $y = 0$; $y = 2$ e $y = 3$.

- 10) Estabeleça a equação da circunferência de círculo tangente à reta $y = 4/3x$ e ao semi-eixo positivo dos x e cujo centro, situado no primeiro quadrante, dista $4\sqrt{5}$ da origem. (E. Flum. E. — 1958)
 Resp.: $x^2 + y^2 - 16x - 8y + 64 = 0$
- 11) Uma circunferência de círculo passa pelo ponto $P(4,8)$ e corta o eixo dos y nos pontos $A(0,4)$ e $B(0,-4)$. Calcule:
 a) a equação da circunferência;
 b) as coordenadas dos pontos M e N de interseção da mediatriz de AP com a circunferência;
 c) a área do quadrilátero $AMPN$ (E.P.U.C. — 1958)
- 12) É dado o triângulo de vértices $A(0,0)$, $B(4,0)$ e $C(3,2)$. Determine o centro do círculo que passa pelos pontos médios de AC e AB e pelo pé da altura traçada do vértice C . (E.N.E. — 1958) Resp.: $(2,5; 0,87)$.
- 13) Achar a equação do círculo que passa pelo vértice e pelo foco da parábola $y^2 = 16x$ e cujo centro está sobre a corda que une os pontos desta parábola de abscissas $1/4$ e 4 e ordenadas positivas. (E.P.U.C. — 1950). Resp.: $x^2 + y^2 - 4x - 9,6y = 0$.
- 14) Dê a equação da reta perpendicular à bissetriz do ângulo dos semi-eixos positivos e que fique à distância 3 da origem. (E.P.U.C. — 1958).
- 15) Escreva a equação do lugar geométrico dos pontos equidistantes das retas $3x + 2y - 6 = 0$ e $3x + 2y - 12 = 0$. (E.N.E. — 1959).
- 16) Estabeleça a equação da circunferência de círculo que tangencia a reta $2x + y - 4 = 0$ no ponto de ordenada igual a 2 e cuja corda comum com a circunferência $x^2 + y^2 - 1 = 0$ é paralela ao eixo das abscissas. (E.N.E. — 1959) Resp.:
 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$
- 17) Dados os pontos $A(a, 0)$ e $B(0, b)$, tomemos sobre a reta AB um ponto C de modo que $BC = m \cdot AB$ (m real, diferente de zero). Pede-se a equação da reta perpendicular a AB e que passa pelo ponto médio do segmento AC . (E. Pol. U. São Paulo — 1951) Resp.: $2ax - 2by + b^2(1+m) - a^2(1-m) = 0$.
- 18) Determinar a equação do círculo que tem para diâmetro o segmento da reta $y + x - 2 = 0$, compreendido entre os eixos coordenados ortogonais. (E.E.U. R. G. Sul — 1959)
- 19) Uma circunferência de centro $(3,3)$ corta o eixo Oy num ponto de ordenada -8 . Calcular os pontos em que ela corta o eixo Ox . (E.E.U.R.G. Sul — 1959)
- 20) Provar que o quadrilátero, cujos vértices são $A(-1,2)$, $B(3,-2)$, $C(+1,-3)$ e $D(-3,1)$ é um paralelogramo. Calcular a área do mesmo. (E. E. U. São Paulo — 1947). Resp.: 12.
- 21) Dados os pontos $A(3,0)$, $B(0,4)$ e $C(1,-1)$, referidos a um sistema cartesiano ortogonal, determinar o ponto equidistante dos pontos A , B e C . (F. E. Industrial — São Paulo)

- 22) Determinar o lugar geométrico dos pontos equidistantes da origem e da reta $x + y = 1$ (F. Fil. São Paulo — 1951)
- 23) Escrever a equação da bissetriz do ângulo das retas $y = 4x + 1$ e $y = 2x + 1$. (F. Fil. São Paulo — 1951).
- 24) Achar a equação da mediatriz do segmento PQ determinado pelos eixos coordenados na reta de equação $3y + x - 6 = 0$. (Fac. Fil. C. e Letras U. Paraná — 1951) Resp.: $3x - y - 8 = 0$.
- 25) Escrever a equação da reta que passa pelo ponto $P(1, 2)$ e faz um ângulo de 45° com a reta de equação $x + 2y + 1 = 0$. (F. Fil. São Bento — São Paulo — 1951)

III. Derivadas. Variação das Funções

- 26) Calcule o valor numérico do coeficiente angular da tangente à curva $y = 3x^2$ no ponto de abscissa $x = 2$. (E.N.E. — 1958).
- 27) Dadas as funções $f(x) = x^2 - 6x + 1$ e $F(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, calcule $f'(0)$, $F'(0)$, $f'(1)$ e $F'(1)$. (E.P.U.C. — 1948) Resp.: $-6, 0, -1, \infty$.
- 28) Determinar o polinômio $f(x)$ do 4.º grau, sabendo que:
 a) sua derivada segunda, $f''(x)$, é igual a $2x^2 - 2x + 3$
 b) o resto da divisão de $f(x)$ por $f''(x)$ é nulo. (E. Flu. E. — 1953)
- 29) Calcule o valor de $\frac{F'(1)}{f'(1)}$ sendo $F(x) = (2x-1)e^{x^2-x+1}$ e $f(x) = e^x$ (E.P.U.C. 958)
- 30) Um trinômio do 2.º grau assume os valores 1, 3 e -5 para $x=1$, $x=2$ e $x=-1$, respectivamente. Escreva esse trinômio e calcule o máximo ou mínimo que ele possua. (E.P.U.C. — 1958)
- 31) Faça o estudo da variação da função $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 4x + 4}$ e trace esquematicamente a curva representativa. (E. Flu. E. — 1958).
- 32) Calcule p e q , de modo que o trinômio $x^2 + px + q$ tenha uma raiz nula e um mínimo para $x = 3$. (E. Flu. E. — 1958)
- 33) Calcule a tangente do ângulo das retas $y = 3x + 1$ e $5x - 2y = 0$ (E.N.E. — 1960. Resp.:
 — Pesquisar os máximos e os mínimos da função $y = x \cdot l x^2$.
 (E.N.E. — 1955) Resp.: Máx.: $x = -\frac{1}{e}$, $y = \frac{2}{e}$ Mín.: $x = \frac{1}{e}$,
 $y = -\frac{2}{e}$.

- 34) Determinar entre os retângulos que possuem 100m de perímetro o que possui a área máxima. (E. E. Recife — 1943)
- 35) Estudar as variações do trinômio biquadrado $y = x^4 - 5x^2 + 4$. (E.E. Paraná P 1942)
- 36) Determinar os máximos e mínimos da função $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 7$. (E. Fil. U.D.F. — 1948) *Resp.*: Mín.: 4; Máx.: -23.
- 37) Determinar a derivada segunda da função $f(x) = \sqrt{1+x^2} + \log_e \sqrt{1+x^2}$. (F.E. Ind. São Paulo — 1952)

IV. Integrais. Cálculo de áreas

- 39) Calcule uma função primitiva de $-\cos \frac{x}{2}$. (E.N.E. — 1958)
- 40) Calcule uma função primitiva de $y = \frac{\sqrt{1-x}}{2}$ (E. Flu. E. — 1958)
- 41) Calcule a área compreendida entre as curvas $y = x^2$ e $y^2 = x$ (E.N.E. — 1958)
- 42) Dada uma circunferência de centro (5,3) e raio 5, consideram-se tangentes nos pontos de abscissa 1(um) e a tangente no ponto de abscissa zero. Calcule a área do triângulo limitado por essas tangentes. (E.N.E. — 1958)
- 43) Calcule uma função primitiva de $4 \sec \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. (E.P.U.C. — 1958)
- 44) Calcule a área da superfície limitada pelas linhas $y = x^2$ e $y = 4x$ (E.N.E. — 1960) *Resp.*: 10,66

V. Números complexos

- 45) Calcule o módulo do quociente da divisão de 2 por $1 - i$. (E. Flu. E. — 1958)
- 46) A expressão geral da diferença entre os argumentos de dois números complexos simétricos é; (E.N.E. — 1958)
- 47) Os complexos $4+2i$ e $2+4i$ têm para representação geométrica os pontos A e B, respectivamente. Calcule o complexo, cuja representação é a extremidade do vetor que se obtém fazendo o vetor AB girar de 90° em torno de A, no sentido trigonométrico. (E.N.E. — 1958)
- 48) Calcule a expressão trigonométrica do complexo $\sqrt{3} + i$. (E.P.U.C. — 1958)

- 49) A forma trigonométrica do complexo $\sqrt{3} - i$ é..... (E.N.E. — 1959).
- 50) Calcule os valores de $\sqrt{3 - 4i}$. (E.N.E. — 1960) *Resp.*: $\pm(2 - i)$.
- 51) Sendo A e B argumentos respectivos dos complexos a e b, a expressão geral do argumento de $\frac{b^2}{a}$ será..... (E.N.E. — 1960) *Resp.*: $2B - A$.

VI. Polinômios. Fórmula de Taylor. Equações algébricas.

- 52) Calcule A e B de forma que o polinômio $Ax^4 + Bx^3 + 1$ seja divisível por $(x-1)^2$ e dê o quociente neste caso. (E. Flu. E. — 1958) *Resp.*: 3, -4, $3x^2 + 2x + 1$.
- 53) Decomponha $x^4 - 1$ num produto de fatores binômios do primeiro grau. (E. Flu. E. — 1958) *Resp.*: $(x+1)(x-1)(x+i)(x-i)$.
- 54) Calcule os valores de a, b e n a fim de que o polinômio $ax^{n+1} + bx^n + 1$ seja divisível por $(x-1)^2$ e que o valor numérico do quociente por $(x-1)^2$ seja 120. (E.N.E. — 1960) *Resp.*: $a=n=15$, $b=-16$.
- 55) Sem efetuar a divisão, determinar p e q, reais, de modo que $x^4 + 1$ seja divisível por $x^2 + px + q$. (E.E. São Paulo — 1950)
- 56) Calcule a soma dos inversos dos quadrados das raízes da equação $x^2 + x + 1 = 0$. (E. Flu. E. — 1958)
- 57) Resolva a equação $x^5 - 5x^4 - 11x^3 + 55x^2 + 18x - 90 = 0$, sabendo que admite a raiz $\sqrt{2}$. (E. N. E. — 1958)
- 58) Resolva a equação $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 = 0$, sabendo que duas de suas raízes são da forma $\alpha \pm \beta i$ e as outras duas da forma $\pm \gamma i$ (E. Flu. E. — 1958) *Resp.*: $\pm i$ e $1 \pm 2i$
- 59) Resolva a equação $10x^4 - 77x^3 + 150x^2 - 77x + 10 = 0$. (E.P.U.C. — 1958)
- 60) Quando a tende para zero, uma das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ tende para ... e a outra tende para..... (E.P.U.C. — 1958)
- 61) Faça o algoritmo de Ruffini-Horner para o cálculo dos coeficientes do desenvolvimento do polinômio $2x^5 - 13x^2 + 4$ para $x = 1 - y$. (E.P.U.C. — 1958)
- 62) Calcule m de forma que uma das raízes da equação $x^2 + mx + 27 = 0$ seja o quadrado da outra. (E.P.U.C. — 1958)
- 63) Determine a transformada de $x^3 + 6x^2 + 5 = 0$, desprovida do termo do 2.º grau. (E.N.E. — 1960)
- 64) Calcular as raízes racionais da equação $3x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 8x + 12 = 0$ (E.N.E. — 1950) *Resp.*: 1, -2, $\frac{3}{2}$
- 65) Calcular m de modo que a equação $x^3 + mx - 2 = 0$ tenha uma raiz dupla e calcular as raízes desta equação. (E.N.E. — 1951) *Resp.*: -3, -1, 2.
- 66) Resolver a equação $8x^4 - 54x^3 + 101x^2 - 54x + 8 = 0$ (E.E.U. Paraná — 1940)

ARY QUINTELLA

José Oscar Senoto
de Oliveira
Colégio Estadual
Em 15/3/6

Tábuas de logaritmos dos números e das funções trigonométricas a quatro decimais

Apenso ao livro do mesmo autor
MATEMÁTICA — CICLO COLEGIAL

Não pode ser vendido isoladamente

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SALVADOR CULTURAL

LIVROS USADOS
COMPRA E VENDA

R. 13 de Maio, 84 - Centro
Fone: (081) 221.4008



INTRODUÇÃO

USO DAS TÁBUAS

1. LOGARITMOS DOS NÚMEROS

A) Dado o número, achar o logaritmo

1.1. NÚMEROS DE 1 a 9.

Procuramos na coluna *N* os números 10, 20, 30 ... e, no cruzamento da linha correspondente com a coluna 0 (zero), encontraremos os quatro algarismos da mantissa, pois, como sabemos, as mantissas dos logaritmos de 1, 10, 100, 1000, ... são iguais.

Exemplo: Seja achar $\log 7$.

Procuramos na coluna *N* o número 70 e, no cruzamento da linha 70 com a coluna 0 (zero), encontramos 8451. Assim, temos:

$$\log 7 = 0,8451.$$

Anàlogamente, obteríamos $\log 0,7$, $\log 0,07$, variando apenas a característica.

1.2. NÚMEROS DE 10 a 99.

Procuramos o número na coluna *N* e, no cruzamento da linha correspondente com a coluna 0 (zero), encontramos a mantissa.

Exemplos: 1.º Achar $\log 37$.

A característica é 1.

Procuramos 37 na coluna *N* e o encontramos no sexto grupo de números da página 6. No cruzamento com a coluna zero, lemos a mantissa 5682. Vem:

$$\log 37 = 1,5682.$$

2.º Achar $\log 0,058$.

A característica é - 2.

Procuramos 58 na coluna *N* e encontramos no primeiro grupo de números da página 7. No cruzamento da linha 58 com a coluna zero encontramos a mantissa 7634. Vem:

$$\log 0,058 = \bar{2},7634.$$

1.3. NÚMEROS DE 100 a 999.

Procuramos os dois primeiros algarismos na coluna *N* e o terceiro na linha *N*. No cruzamento da linha dos dois primeiros com a coluna do último lemos a mantissa.

Exemplo: Achar $\log 14,8$.

A característica é 1.

Procuramos 14 na coluna *N* (1.º grupo, página 6) e o algarismo 8 na linha *N*. No cruzamento da linha 14 com a coluna 8 encontramos a mantissa 1703. Resulta:

$$\log 14,8 = 1,1703.$$

1.4. NÚMEROS DE 1000 a 9999.

Procuramos os dois primeiros algarismos na coluna *N* e o terceiro na linha *N*. No cruzamento da linha com a coluna encontramos quatro algarismos de mantissa. Em seguida, procuramos o quarto algarismo na "parte proporcional" e adicionamos à mantissa encontrada o número correspondente da mesma linha.

Exemplo: Achar $\log 6849$.

No cruzamento da linha 68 (página 7, 3.º grupo) com a coluna 4 encontramos 8351. Nas partes proporcionais, coluna 9 (4.º algarismo do número dado) encontramos na mesma linha o número 6 que somaremos à mantissa anterior.

Dispositivo prático:

$$\begin{array}{rcl} \text{para } 684 & \longrightarrow & 8351 \\ \text{para } 9 & \longrightarrow & 6 \\ \hline \log 6849 & = & 3,8357 \end{array}$$

1.5. NÚMEROS MAIORES QUE 10000.

Nêste caso, abandonaremos os algarismos do quinto em diante, por não afetarem a 4.ª ordem decimal da mantissa.

Exemplo: Achar $\log. 31,65789$.

Arredondamos o número até o quarto algarismo significativo e procuramos o logaritmo de 31,66. Temos:

$$\begin{array}{rcl} \text{para } 316 & \longrightarrow & 4997 \text{ (página 6, 5.º grupo)} \\ \text{para } 6 & \longrightarrow & 8 \\ \hline \text{o } 31,66 & = & 1,5005 \end{array}$$

B) Dado o logaritmo, achar o número

1.6. A MANTISSA DADA ESTÁ NA TÁBUA.

Nêste caso o número correspondente é lido imediatamente. Os dois primeiros algarismos na linha onde foi encontrada a mantissa e o terceiro no alto da coluna.

Exemplo: Achar x , sendo $\log x = 0,7292$.

O número x tem um algarismo na parte inteira. Para encontrar os algarismos de x , lemos a mantissa 7292 na página 6, sétima coluna. Os dois primeiros algarismos encontram-se na linha da mantissa e são 53 o último algarismo (3.º) encontra-se na coluna, é 6. Conclui-se:

$$x = 5,36.$$

1.7. A MANTISSA NÃO ESTÁ NA TÁBUA.

Seja achar o número x , sendo $\log x = 1,4484$.

O número tem dois algarismos na parte inteira (característica 1).

Procuramos a mantissa inferior e mais próxima de 4484. Encontramos 4472 que corresponde ao número 280 (caso anterior). A diferença entre a mantissa da tábu, 4472, e a mantissa dada, 4484 é 12. Nas partes proporcionais e na linha da mantissa 4472, procuramos a diferença 12 e a encontramos na oitava coluna. O algarismo 8, escrito ao alto desta coluna, é o quarto algarismo do número procurado.

O número é, então, 2,808.

Dispositivo prático:

$$\begin{array}{rcl} \text{para } 4472 & \longrightarrow & 280 \\ \text{diferença } 12 & \longrightarrow & 8 \\ \hline x & = & 2,808. \end{array}$$

OBSERVAÇÃO. Se a diferença 12 não fôsse encontrada nas partes proporcionais, utilizaríamos a diferença imediatamente mais próxima e menor que 12.

2. LOGARITMOS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As instruções para o uso das tábuas encontram-se no corpo do volume do Segundo Ano Colegial.

LOGARITMOS

LOGARITMOS											PARTE PROPORCIONAL								
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551	1	2	4	5	6	7	8	10	11
36	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712	1	2	3	4	5	6	7	8	9
47	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803	1	2	3	4	5	6	7	8	9
48	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893	1	2	3	4	5	6	7	8	9
49	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235	1	2	2	3	4	5	6	7	8
53	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316	1	2	2	3	4	5	6	7	8
54	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396	1	2	2	3	4	5	6	7	8

DOS NÚMEROS

LOGARITMOS											PARTE PROPORCIONAL								
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319	1	1	2	3	3	4	4	5	6
68	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382	1	1	2	2	3	4	4	5	6
69	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859	1	1	2	2	3	3	4	4	5
77	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	.9345	.9350	.9354	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952	0	1	1	2	2	3	3	3	4
99	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

LOGARITMOS DAS FUNÇÕES CIRCULARES

0° a 5°										85° a 90°									
°	'	sen	dl'	tan	dcl'	cot	cos	dl'		°	'	sen	dl'	tan	dcl'	cot	cos	dl'	
0	0						0,0000		90	0	0								
	10	3,4637	301,1	3,4637	301,1	2,5363	0,0000				10	3,4637	301,1	3,4637	301,1	2,5363	0,0000		
	20	7648	176,0	7648	176,1	2352	0,0000	,0	50		20	7648	176,0	7648	176,1	2352	0,0000	,0	40
	30	9408	125,0	9409	124,9	0591	0,0000	,0	30		30	9408	125,0	9409	124,9	0591	0,0000	,0	20
	40	2,0658	96,9	2,0658	96,9	1,9342	0,0000	,0	10		40	2,0658	96,9	2,0658	96,9	1,9342	0,0000	,0	10
	50	1627	79,2	1627	79,2	8373	0,0000	,1			50	1627	79,2	1627	79,2	8373	0,0000	,1	
1	0	2,2419	66,9	2,2419	67,0	1,7581	1,9999		89	0	0	2,2419	66,9	2,2419	67,0	1,7581	1,9999		
	10	3088	58,0	3089	58,0	6911	9999	,0	50		10	3088	58,0	3089	58,0	6911	9999	,0	50
	20	3668	51,1	3669	51,2	6331	9999	,0	40		20	3668	51,1	3669	51,2	6331	9999	,0	40
	30	4179	45,8	4181	45,7	5819	9999	,1	30		30	4179	45,8	4181	45,7	5819	9999	,1	30
	40	4637	41,3	4638	41,5	5362	9998	,0	20		40	4637	41,3	4638	41,5	5362	9998	,0	20
	50	2,5050	37,8	2,5053	37,8	1,4947	1,9998	,1	10		50	2,5050	37,8	2,5053	37,8	1,4947	1,9998	,1	10
2	0	2,5428	34,8	2,5431	34,8	1,4569	1,9997		88	0	0	2,5428	34,8	2,5431	34,8	1,4569	1,9997		
	10	5776	32,1	5779	32,2	4221	9997	,0	50		10	5776	32,1	5779	32,2	4221	9997	,0	50
	20	6097	30,0	6101	30,0	3899	9996	,1	40		20	6097	30,0	6101	30,0	3899	9996	,1	40
	30	6397	28,0	6401	28,1	3599	9996	,0	30		30	6397	28,0	6401	28,1	3599	9996	,0	30
	40	6677	26,3	6682	26,3	3318	9995	,1	20		40	6677	26,3	6682	26,3	3318	9995	,1	20
	50	2,6940	24,8	2,6945	24,9	1,3055	1,9995	,0	10		50	2,6940	24,8	2,6945	24,9	1,3055	1,9995	,0	10
3	0	2,7188	23,5	2,7194	23,5	1,2806	1,9994		87	0	0	2,7188	23,5	2,7194	23,5	1,2806	1,9994		
	10	7423	22,2	7429	22,3	2571	9993	,1	50		10	7423	22,2	7429	22,3	2571	9993	,1	50
	20	7645	21,2	7652	21,3	2348	9993	,0	40		20	7645	21,2	7652	21,3	2348	9993	,0	40
	30	7857	20,2	7865	20,2	2135	9992	,1	30		30	7857	20,2	7865	20,2	2135	9992	,1	30
	40	8059	19,2	8067	19,4	1933	9991	,1	20		40	8059	19,2	8067	19,4	1933	9991	,1	20
	50	2,8251	18,5	2,8261	18,5	1,1739	1,9990	,1	10		50	2,8251	18,5	2,8261	18,5	1,1739	1,9990	,1	10
4	0	2,8436	17,7	2,8446	17,8	1,1554	1,9989		86	0	0	2,8436	17,7	2,8446	17,8	1,1554	1,9989		
	10	8613	17,0	8624	17,1	1376	9989	,0	50		10	8613	17,0	8624	17,1	1376	9989	,0	50
	20	8783	16,3	8795	16,5	1205	9988	,1	40		20	8783	16,3	8795	16,5	1205	9988	,1	40
	30	8946	15,8	8960	15,8	1040	9987	,1	30		30	8946	15,8	8960	15,8	1040	9987	,1	30
	40	9104	15,2	9118	15,4	0882	9986	,1	20		40	9104	15,2	9118	15,4	0882	9986	,1	20
	50	2,9256	14,7	2,9272	14,8	1,0728	1,9985	,2	10		50	2,9256	14,7	2,9272	14,8	1,0728	1,9985	,2	10
5	0	2,9403		2,9420		1,0580	1,9983		85	0	0	2,9403		2,9420		1,0580	1,9983		
		cos	dl'	cot	dcl'	tan	sen	dl'	'			cos	dl'	cot	dcl'	tan	sen	dl'	'
10" — 0,17; 20" — 0,33; 30" — 0,50; 40" — 0,67; 50" — 0,83																			

5° a 10°										80° a 85°									
°	'	sen	dl'	tan	dcl'	cot	cos	dl'		°	'	sen	dl'	tan	dcl'	cot	cos	dl'	
5	0	2,9403		2,9420		1,0580	1,9983		85	5	0	2,9403		2,9420		1,0580	1,9983		
	10	9545	14,2	9563	14,3	0437	9982	,1	50		10	9545	14,2	9563	14,3	0437	9982	,1	50
	20	9682	13,7	9701	13,8	0299	9981	,1	40		20	9682	13,7	9701	13,8	0299	9981	,1	40
	30	9816	13,4	9836	13,5	0164	9980	,1	30		30	9816	13,4	9836	13,5	0164	9980	,1	30
	40	9945	12,9	9966	13,0	0034	9979	,1	20		40	9945	12,9	9966	13,0	0034	9979	,1	20
	50	1,0070	12,5	1,0093	12,7	0,9907	1,9977	,2	10		50	1,0070	12,5	1,0093	12,7	0,9907	1,9977	,2	10
			12,2		12,3			,1											
6	0	1,0192		1,0216		0,9784	1,9976		84	6	0	1,0192		1,0216		0,9784	1,9976		
	10	0311	11,9	0336	12,0	9664	9975	,1	50		10	0311	11,9	0336	12,0	9664	9975	,1	50
	20	0426	11,5	0453	11,7	9547	9973	,2	40		20	0426	11,5	0453	11,7	9547	9973	,2	40
	30	0539	11,3	0567	11,4	9433	9972	,1	30		30	0539	11,3	0567	11,4	9433	9972	,1	30
	40	0648	10,9	0678	11,1	9322	9971	,1	20		40	0648	10,9	0678	11,1	9322	9971	,1	20
	50	1,0755	10,7	1,0786	10,8	0,9214	1,9969	,2	10		50	1,0755	10,7	1,0786	10,8	0,9214	1,9969	,2	10
			10,4		10,5			,1											
7	0	1,0859		1,0891		0,9109	1,9968		83	7	0	1,0859		1,0891		0,9109	1,9968		
	10	0961	10,2	0995	10,4	9005	9966	,2	50		10	0961	10,2	0995	10,4	9005	9966	,2	50
	20	1060	9,9	1096	10,1	8904	9964	,2	40		20	1060	9,9	1096	10,1	8904	9964	,2	40
	30	1157	9,7	1194	9,8	8806	9963	,1	30		30	1157	9,7	1194	9,8	8806	9963	,1	30
	40	1252	9,5	1291	9,7	8709	9961	,2	20		40	1252	9,5	1291	9,7	8709	9961	,2	20
	50	1,1345	9,3	1,1385	9,4	0,8615	1,9959	,2	10		50	1,1345	9,3	1,1385	9,4	0,8615	1,9959	,2	10
			9,1		9,3			,1											
8	0	1,1436		1,1478		0,8522	1,9958		82	8	0	1,1436		1,1478		0,8522	1,9958		
	10	1525	8,9	1569	9,1	8431	9956	,2	50		10	1525	8,9	1569	9,1	8431	9956	,2	50
	20	1612	8,7	1658	8,9	8342	9954	,2	40		20	1612	8,7	1658	8,9	8342	9954	,2	40
	30	1697	8,5	1745	8,7	8255	9952	,2	30		30	1697	8,5	1745	8,7	8255	9952	,2	30
	40	1781	8,4	1831	8,6	8169	9950	,2	20		40	1781	8,4	1831	8,6	8169	9950	,2	20
	50	1,1863	8,2	1,1915	8,4	0,8085	1,9948	,2	10		50	1,1863	8,2	1,1915	8,4	0,8085	1,9948	,2	10
			8,0		8,2			,2											
9	0	1,1943		1,1997		0,8003	1,9946		81	9	0	1,1943		1,1997		0,8003	1,9946		
	10	2022	7,9	2078	8,1	7922	9944	,2	50		10	2022	7,9	2078	8,1	7922	9944	,2	50
	20	2100	7,8	2158	8,0	7842	9942	,2	40		20	2100	7,8	2158	8,0	7842	9942	,2	40
	30	2176	7,6	2236	7,8	7764	9940	,2	30		30	2176	7,6	2236	7,8	7764	9940	,2	30
	40	2251	7,5	2313	7,7	7687	9938	,2	20		40	2251	7,5	2313	7,7	7687	9938	,2	20
	50	1,2324	7,3	1,2389	7,6	0,7611	1,9936	,2	10		50	1,2324	7,3	1,2389	7,6	0,7611	1,9936	,2	10
			7,3		7,4			,2											
10	0	1,2397		1,2463		0,7537	1,9934		80	10	0	1,2397		1,2463		0,7537	1,9934		
		cos	dl'	cot	dcl'	tan	sen	dl'	'			cos	dl'	cot	dcl'	tan	sen	dl'	'
10" — 0,17; 20" — 0,33; 30" — 0,50; 40" — 0,67; 50" — 0,83																			

10° a 15°										75° a 80°									
°	'	sen	dl'	tan	del'	cot	cos	dl'											
10	0	1,2397	7,1	1,2463	7,3	0,7537	1,9934	,3	0	80									
	10	2468	7,0	2536	7,3	7464	9931	,2	50										
	20	2538	6,8	2609	7,1	7391	9929	,2	40										
	30	2606	6,8	2680	7,0	7320	9927	,3	30										
	40	2674	6,6	2750	6,9	7250	9924	,2	20										
	50	1,2740	6,6	1,2819	6,8	0,7181	1,9922	,3	10										
11	0	1,2806	6,4	1,2887	6,6	0,7113	1,9919	,2	0	79									
	10	2870	6,4	2953	6,7	7047	9917	,3	50										
	20	2934	6,3	3020	6,5	6980	9914	,2	40										
	30	2997	6,1	3085	6,4	6915	9912	,3	30										
	40	3058	6,1	3149	6,3	6851	9909	,2	20										
	50	1,3119	6,0	1,3212	6,3	0,6788	1,9907	,3	10										
12	0	1,3179	5,9	1,3275	6,1	0,6725	1,9904	,3	0	78									
	10	3238	5,8	3336	6,1	6664	9901	,2	50										
	20	3296	5,7	3397	6,1	6603	9899	,3	40										
	30	3353	5,7	3458	5,9	6542	9896	,3	30										
	40	3410	5,6	3517	5,9	6483	9893	,3	20										
	50	1,3466	5,5	1,3576	5,8	0,6424	1,9890	,3	10										
13	0	1,3521	5,4	1,3634	5,7	0,6366	1,9887	,3	0	77									
	10	3575	5,4	3691	5,7	6309	9884	,3	50										
	20	3629	5,3	3748	5,6	6252	9881	,3	40										
	30	3682	5,2	3804	5,5	6196	9878	,3	30										
	40	3734	5,2	3859	5,5	6141	9875	,3	20										
	50	1,3786	5,1	1,3914	5,4	0,6086	1,9872	,3	10										
14	0	1,3837	5,0	1,3968	5,3	0,6032	1,9869	,3	0	76									
	10	3887	5,0	4021	5,3	5979	9866	,3	50										
	20	3937	4,9	4074	5,3	5926	9863	,4	40										
	30	3986	4,9	4127	5,1	5873	9859	,3	30										
	40	4035	4,8	4178	5,2	5822	9856	,3	20										
	50	1,4083	4,7	1,4230	5,1	0,5770	1,9853	,4	10										
15	0	1,4130		1,4281		0,5719	1,9849		0	75									
		cos	dl'	cot	del'	tan	sen	dl'	'	°									
10'' — 0,17; 20'' — 0,33; 30'' — 0,50; 40'' — 0,67; 50'' — 0,83																			

15° a 20°										70° a 75°									
°	'	sen	dl'	tan	del'	cot	cos	dl'											
15	0	1,4130	4,7	1,4281	5,0	0,5719	1,9849	,3	0	75									
	10	4177	4,6	4331	5,0	5669	9846	,3	50										
	20	4223	4,6	4381	4,9	5619	9843	,4	40										
	30	4269	4,5	4430	4,9	5570	9839	,3	30										
	40	4314	4,5	4479	4,8	5521	9836	,4	20										
	50	1,4359	4,4	1,4527	4,8	0,5473	1,9832	,4	10										
16	0	1,4403	4,4	1,4575	4,7	0,5425	1,9828	,3	0	74									
	10	4447	4,4	4622	4,7	5378	9825	,4	50										
	20	4491	4,2	4669	4,7	5331	9821	,4	40										
	30	4533	4,3	4716	4,6	5284	9817	,3	30										
	40	4576	4,2	4762	4,6	5238	9814	,4	20										
	50	1,4618	4,1	1,4808	4,5	0,5192	1,9810	,4	10										
17	0	1,4659	4,1	1,4853	4,5	0,5147	1,9806	,4	0	73									
	10	4700	4,1	4898	4,5	5102	9802	,4	50										
	20	4741	4,0	4943	4,4	5057	9798	,4	40										
	30	4781	4,0	4987	4,4	5013	9794	,4	30										
	40	4821	4,0	5031	4,4	4969	9790	,4	20										
	50	1,4861	3,9	1,5075	4,3	0,4925	1,9786	,4	10										
18	0	1,4900	3,9	1,5118	4,3	0,4882	1,9782	,4	0	72									
	10	4939	3,8	5161	4,2	4839	9778	,4	50										
	20	4977	3,8	5203	4,2	4797	9774	,4	40										
	30	5015	3,7	5245	4,2	4755	9770	,5	30										
	40	5052	3,8	5287	4,2	4713	9765	,4	20										
	50	1,5090	3,6	1,5329	4,1	0,4671	1,9761	,4	10										
19	00	1,5126	3,7	1,5370	4,1	0,4630	1,9757	,5	0	71									
	10	5163	3,6	5411	4,0	4589	9752	,4	50										
	20	5199	3,6	5451	4,0	4549	9748	,5	40										
	30	5235	3,5	5491	4,0	4509	9743	,4	30										
	40	5270	3,6	5531	4,0	4469	9739	,5	20										
	50	1,5306	3,5	1,5571	4,0	0,4429	1,9734	,4	10										
20	0	1,5341		1,5611		0,4389	1,9730		0	70									
		cos	dl'	cot	del'	tan	sen	dl'	'	°									
10'' — 0,17; 20'' — 0,33; 30'' — 0,50; 40'' — 0,67; 50'' — 0,83																			

20° a 25°								65° a 70°							
°	'	sen	dl'	tan	del'	cot	cos	dl'	'	°					
20	0	I,5341		I,5611		0,4389	I,9730		0	70					
	10	5375	3,4	5650	3,9	4350	9725	,5	50						
	20	5409	3,4	5689	3,9	4311	9721	,4	40						
	30	5443	3,4	5727	3,8	4273	9716	,5	30						
	40	5477	3,4	5766	3,9	4234	9711	,5	20						
	50	I,5510	3,3	I,5804	3,8	0,4196	I,9706	,5	10						
21	0	I,5543		I,5842		0,4158	I,9702		0	69					
	10	5576	3,3	5879	3,7	4121	9697	,5	50						
	20	5609	3,3	5917	3,8	4083	9692	,5	40						
	30	5641	3,2	5954	3,7	4046	9687	,5	30						
	40	5673	3,2	5991	3,7	4009	9682	,5	20						
	50	I,5704	3,1	I,6028	3,7	0,3972	I,9677	,5	10						
22	0	I,5736		I,6064		0,3936	I,9672		0	68					
	10	5767	3,1	6100	3,6	3900	9667	,5	50						
	20	5798	3,1	6136	3,6	3864	9661	,6	40						
	30	5828	3,0	6172	3,6	3828	9656	,5	30						
	40	5859	3,1	6208	3,6	3792	9651	,5	20						
	50	I,5889	3,0	I,6243	3,5	0,3757	I,9646	,5	10						
23	0	I,5919		I,6279		0,3721	I,9640		0	67					
	10	5948	2,9	6314	3,5	3686	9635	,5	50						
	20	5978	3,0	6348	3,4	3652	9629	,6	40						
	30	6007	2,9	6383	3,5	3617	9624	,5	30						
	40	6036	2,9	6417	3,4	3583	9618	,6	20						
	50	I,6065	2,9	I,6452	3,5	0,3548	I,9613	,5	10						
24	0	I,6093		I,6486		0,3514	I,9607		0	66					
	10	6121	2,8	6520	3,4	3480	9602	,5	50						
	20	6149	2,8	6553	3,3	3447	9596	,6	40						
	30	6177	2,8	6587	3,4	3413	9590	,6	30						
	40	6205	2,8	6620	3,3	3380	9584	,6	20						
	50	I,6232	2,7	I,6654	3,4	0,3346	I,9579	,5	10						
25	0	I,6259		I,6687		0,3313	I,9573		0	65					
		cos	dl'	cot	del'	tan	sen	dl'	'	°					
10'' — 0,17; 20'' — 0,33; 30'' — 0,50; 40'' — 0,67; 50'' — 0,83															

25° a 30°								60° a 65°							
°	'	sen	dl'	tan	del'	cot	cos	dl'	'	°					
25	0	I,6259		I,6687		0,3313	I,9573		0	65					
	10	6286	2,7	6720	3,3	3280	9567	,6	50						
	20	6313	2,7	6752	3,2	3248	9561	,6	40						
	30	6340	2,7	6785	3,3	3215	9555	,6	30						
	40	6366	2,6	6817	3,2	3183	9549	,6	20						
	50	I,6392	2,6	I,6850	3,3	0,3150	I,9543	,6	10						
26	0	I,6418		I,6882		0,3118	I,9537		0	64					
	10	6444	2,6	6914	3,2	3086	9530	,7	50						
	20	6470	2,6	6946	3,2	3054	9524	,6	40						
	30	6495	2,5	6977	3,1	3023	9518	,6	30						
	40	6521	2,6	7009	3,2	2991	9512	,6	20						
	50	I,6546	2,5	I,7040	3,1	0,2960	I,9505	,7	10						
27	0	I,6570		I,7072		0,2928	I,9499		0	63					
	10	6595	2,5	7103	3,1	2897	9492	,7	50						
	20	6620	2,5	7134	3,1	2866	9486	,6	40						
	30	6644	2,4	7165	3,1	2833	9479	,7	30						
	40	6668	2,4	7196	3,1	2804	9473	,6	20						
	50	I,6692	2,4	I,7226	3,0	0,2774	I,9466	,7	10						
28	0	I,6716		I,7257		0,2743	I,9459		0	62					
	10	6740	2,4	7287	3,0	2713	9453	,6	50						
	20	6763	2,3	7317	3,0	2683	9446	,7	40						
	30	6787	2,4	7348	3,1	2652	9439	,7	30						
	40	6810	2,3	7378	3,0	2622	9432	,7	20						
	50	I,6833	2,3	I,7408	3,0	0,2592	I,9425	,7	10						
29	0	I,6856		I,7438		0,2562	I,9418		0	61					
	10	6878	2,2	7467	2,9	2533	9411	,7	50						
	20	6901	2,3	7497	3,0	2503	9404	,7	40						
	30	6923	2,2	7526	2,9	2474	9397	,7	30						
	40	6946	2,3	7556	3,0	2444	9390	,7	20						
	50	I,6968	2,2	I,7585	2,9	0,2415	I,9383	,8	10						
30	0	I,6990		I,7614		0,2386	I,9375		0	60					
		cos	dl'	cot	del'	tan	sen	dl'	'	°					
10'' — 0,17; 20'' — 0,33; 30'' — 0,50; 40'' — 0,67; 50'' — 0,83															

30° a 35°										55° a 60°									
°		sen	dl'	tan	del'	cot	cos	dl'		°		sen	dl'	tan	del'	cot	cos	dl'	
30	0	1,6990	2,2	1,7614	3,0	0,2386	1,9375	,7	0	60	0	1,7586	1,8	1,8452	2,7	0,1548	1,9134	,9	0
	10	7012	2,1	7644	2,9	2356	9368	,7	50		10	7604	1,8	8479	2,7	1521	9125	,9	50
	20	7033	2,2	7673	2,8	2327	9361	,8	40		20	7622	1,8	8506	2,7	1494	9116	,9	40
	30	7055	2,1	7701	2,9	2299	9353	,7	30		30	7640	1,7	8533	2,6	1467	9107	,9	30
	40	7076	2,1	7730	2,9	2270	9346	,8	20		40	7657	1,8	8559	2,7	1441	9098	,9	20
	50	1,7097	2,1	1,7759	2,9	0,2241	1,9338	,7	10		50	1,7675	1,7	1,8586	2,7	0,1414	1,9089	,9	10
31	0	1,7118	2,1	1,7788	2,8	0,2212	1,9331	,8	0	59	0	1,7692	1,8	1,8613	2,6	0,1387	1,9080	1,0	0
	10	7139	2,1	7816	2,9	2184	9323	,8	50		10	7710	1,7	8639	2,7	1361	9070	,9	50
	20	7160	2,1	7845	2,8	2155	9315	,7	40		20	7727	1,7	8666	2,6	1334	9061	,9	40
	30	7181	2,0	7873	2,9	2127	9308	,8	30		30	7744	1,7	8692	2,6	1308	9052	1,0	30
	40	7201	2,1	7902	2,8	2098	9300	,8	20		40	7761	1,7	8718	2,7	1282	9042	,9	20
	50	1,7222	2,0	1,7930	2,8	0,2070	1,9292	,8	10		50	1,7778	1,7	1,8745	2,6	0,1255	1,9033	1,0	10
32	0	1,7242	2,0	1,7958	2,8	0,2042	1,9284	,8	0	58	0	1,7795	1,6	1,8771	2,6	0,1229	1,9023	,9	0
	10	7262	2,0	7986	2,8	2014	9276	,8	50		10	7811	1,7	8797	2,7	1203	9014	1,0	50
	20	7282	2,0	8014	2,8	1986	9268	,8	40		20	7828	1,6	8824	2,6	1176	9004	,9	40
	30	7302	2,0	8042	2,8	1958	9260	,8	30		30	7844	1,7	8850	2,6	1150	8995	1,0	30
	40	7322	2,0	8070	2,7	1930	9252	,8	20		40	7861	1,6	8876	2,6	1124	8985	1,0	20
	50	1,7342	1,9	1,8097	2,8	0,1903	1,9244	,8	10		50	1,7877	1,6	1,8902	2,6	0,1098	1,8975	1,0	10
33	0	1,7361	1,9	1,8125	2,8	0,1875	1,9236	,8	0	57	0	1,7893	1,7	1,8928	2,6	0,1072	1,8965	1,0	0
	10	7380	2,0	8153	2,7	1847	9228	,9	50		10	7910	1,6	8954	2,6	1046	8955	1,0	50
	20	7400	1,9	8180	2,8	1820	9219	,8	40		20	7926	1,5	8980	2,6	1020	8945	1,0	40
	30	7419	1,9	8208	2,7	1792	9211	,8	30		30	7941	1,6	9006	2,6	0994	8935	1,0	30
	40	7438	1,9	8235	2,8	1765	9203	,9	20		40	7957	1,6	9032	2,6	0968	8925	1,0	20
	50	1,7457	1,9	1,8263	2,7	0,1737	1,9194	,8	10		50	1,7973	1,6	1,9058	2,6	0,0942	1,8915	1,0	10
34	0	1,7476	1,8	1,8290	2,7	0,1710	1,9186	,9	0	56	0	1,7989	1,5	1,9084	2,6	0,0916	1,8905	1,0	0
	10	7494	1,9	8317	2,7	1683	9177	,8	50		10	8004	1,6	9110	2,5	0890	8895	1,1	50
	20	7513	1,8	8344	2,7	1656	9169	,9	40		20	8020	1,5	9135	2,6	0865	8884	1,0	40
	30	7531	1,9	8371	2,7	1629	9160	,9	30		30	8035	1,5	9161	2,6	0839	8874	1,0	30
	40	7550	1,8	8398	2,7	1602	9151	,9	20		40	8050	1,6	9187	2,5	0813	8864	1,1	20
	50	1,7568	1,8	1,8425	2,7	0,1575	1,9142	,8	10		50	1,8066	1,5	1,9212	2,6	0,0788	1,8853	1,0	10
35	0	1,7586		1,8452		0,1548	1,9134		0	55									
		cos	dl'	cot	del'	tan	sen	dl'	'	°									

10" — 0,17; 20" — 0,33; 30" — 0,50; 40" — 0,67; 50" — 0,83

35° a 40°										50° a 55°									
°		sen	dl'	tan	del'	cot	cos	dl'		°		sen	dl'	tan	del'	cot	cos	dl'	
35	0	1,7586	1,8	1,8452	2,7	0,1548	1,9134	,9	0	55	0	1,7586	1,8	1,8452	2,7	0,1548	1,9134	,9	0
	10	7604	1,8	8479	2,7	1521	9125	,9	50		10	7604	1,8	8479	2,7	1521	9125	,9	50
	20	7622	1,8	8506	2,7	1494	9116	,9	40		20	7622	1,8	8506	2,7	1494	9116	,9	40
	30	7640	1,7	8533	2,6	1467	9107	,9	30		30	7640	1,7	8533	2,6	1467	9107	,9	30
	40	7657	1,8	8559	2,7	1441	9098	,9	20		40	7657	1,8	8559	2,7	1441	9098	,9	20
	50	1,7675	1,7	1,8586	2,7	0,1414	1,9089	,9	10		50	1,7675	1,7	1,8586	2,7	0,1414	1,9089	,9	10
36	0	1,7692	1,8	1,8613	2,6	0,1387	1,9080	1,0	0	54	0	1,7692	1,8	1,8613	2,6	0,1387	1,9080	1,0	0
	10	7710	1,7	8639	2,7	1361	9070	,9	50		10	7710	1,7	8639	2,7	1361	9070	,9	50
	20	7727	1,7	8666	2,6	1334	9061	,9	40		20	7727	1,7	8666	2,6	1334	9061	,9	40
	30	7744	1,7	8692	2,6	1308	9052	1,0	30		30	7744	1,7	8692	2,6	1308	9052	1,0	30
	40	7761	1,7	8718	2,7	1282	9042	,9	20		40	7761	1,7	8718	2,7	1282	9042	,9	20
	50	1,7778	1,7	1,8745	2,6	0,1255	1,9033	1,0	10		50	1,7778	1,7	1,8745	2,6	0,1255	1,9033	1,0	10
37	0	1,7795	1,6	1,8771	2,6	0,1229	1,9023	,9	0	53	0	1,7795	1,6	1,8771	2,6	0,1229	1,9023	,9	0
	10	7811	1,7	8797	2,7	1203	9014	1,0	50		10	7811	1,7	8797	2,7	1203	9014	1,0	50
	20	7828	1,6	8824	2,6	1176	9004	,9	40		20	7828	1,6	8824	2,6	1176	9004	,9	40
	30	7844	1,7	8850	2,6	1150	8995	1,0	30		30	7844	1,7	8850	2,6	1150	8995	1,0	30
	40	7861	1,6	8876	2,6	1124	8985	1,0	20		40	7861	1,6	8876	2,6	1124	8985	1,0	20
	50	1,7877	1,6	1,8902	2,6	0,1098	1,8975	1,0	10		50	1,7877	1,6	1,8902	2,6	0,1098	1,8975	1,0	10
38	0	1,7893	1,7	1,8928	2,6	0,1072	1,8965	1,0	0	52	0	1,7893	1,7	1,8928	2,6	0,1072	1,8965	1,0	0
	10	7910	1,6	8954	2,6	1046	8955	1,0	50		10	7910	1,6	8954	2,6	1046	8955	1,0	50
	20	7926	1,5	8980	2,6	1020	8945	1,0	40		20	7926	1,5	8980	2,6	1020	8945	1,0	40
	30	7941	1,6	9006	2,6	0994	8935	1,0	30		30	7941	1,6	9006	2,6	0994	8935	1,0	30
	40	7957	1,6	9032	2,6	0968	8925	1,0	20		40	7957	1,6	9032	2,6	0968	8925	1,0	20
	50	1,7973	1,6	1,9058	2,6	0,0942	1,8915	1,0	10		50	1,7973	1,6	1,9058	2,6	0,0942	1,8915	1,0	10
39	0	1,7989	1,5	1,9084	2,6	0,0916	1,8905	1,0	0	51	0	1,7989	1,5	1,9084	2,6	0,0916	1,8905	1,0	0
	10	8004	1,6	9110	2,5	0890	8895	1,1	50		10	8004	1,6	9110	2,5	0890	8895	1,1	50
	20	8020	1,5	9135	2,6	0865	8884	1,0	40		20	8020	1,5	9135	2,6	0865	8884	1,0	40
	30	8035	1,5	9161	2,6	0839	8874	1,0	30		30	8035	1,5	9161	2,6	0839	8874	1,0	30
	40	8050	1,6	9187	2,5	0813	8864	1,1	20		40	8050	1,6	9187	2,5	0813	8864	1,1	20
	50	1,8066	1,5	1,9212	2,6	0,0788	1,8853	1,0	10		50	1,8066	1,5	1,9212	2,6	0,0788	1,8853	1,0	10
40	0	1,8081		1,9238		0,0762	1,8843		0	50									
		cos	dl'	cot	del'	tan	sen	dl'	'	°									

10" — 0,17; 20" — 0,33; 30" — 0,50; 40" — 0,67; 50" — 0,83

40° a 45°

45° a 50°

°	'	sen	dl'	tan	del'	cot	cos	dl'	'	°
40	0	1,8081		1,9238		0,0762	1,8843		0	50
	10	8096	1,5	9264	2,6	0736	8832	1,1	50	
	20	8111	1,5	9289	2,5	0711	8821	1,1	40	
	30	8125	1,4	9315	2,6	0685	8810	1,1	30	
	40	8140	1,5	9341	2,6	0659	8800	1,0	20	
	50	1,8155	1,5	1,9366	2,5	0634	1,8789	1,1	10	
41	0	1,8169		1,9392		0,0608	1,8778		0	49
	10	8184	1,5	9417	2,5	0583	8767	1,1	50	
	20	8198	1,4	9443	2,6	0557	8756	1,1	40	
	30	8213	1,5	9468	2,5	0532	8745	1,1	30	
	40	8227	1,4	9494	2,6	0506	8733	1,2	20	
	50	1,8241	1,4	1,9519	2,5	0,0481	1,8722	1,1	10	
42	0	1,8255		1,9544		0,0456	1,8711		0	48
	10	8269	1,4	9570	2,6	0430	8699	1,2	50	
	20	8283	1,4	9595	2,5	0405	8688	1,1	40	
	30	8297	1,4	9621	2,6	0379	8676	1,2	30	
	40	8311	1,4	9646	2,5	0354	8665	1,1	20	
	50	1,8324	1,3	1,9671	2,5	0,0329	1,8653	1,2	10	
43	0	1,8338		1,9697		0,0303	1,8641		0	47
	10	8351	1,3	9722	2,5	0278	8629	1,2	50	
	20	8365	1,4	9747	2,5	0253	8618	1,1	40	
	30	8378	1,3	9772	2,5	0228	8606	1,2	30	
	40	8391	1,3	9798	2,6	0202	8594	1,2	20	
	50	1,8405	1,4	1,9823	2,5	0,0177	1,8582	1,2	10	
44	0	1,8418		1,9848		0,0152	1,8569		0	46
	10	8431	1,3	9874	2,6	0126	8557	1,2	50	
	20	8444	1,3	9899	2,5	0101	8545	1,2	40	
	30	8457	1,3	9924	2,5	0076	8532	1,3	30	
	40	8469	1,2	9949	2,5	0051	8520	1,2	20	
	50	1,8482	1,3	1,9975	2,6	0,0025	1,8507	1,3	10	
45	0	1,8495		0,0000		0,0000	1,8495		0	45
		cos	dl'	cot	del'	tan	sen	dl'	'	°

10" — 0,17; 20" — 0,33; 30" — 0,50; 40" — 0,67; 50" — 0,83